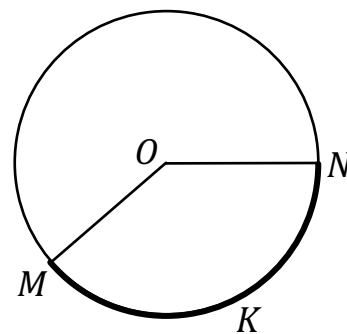


4. (1,5 б)

На рисунку O – центр кола, $\angle MON = 220^\circ$, довжина кола дорівнює 18 см. Знайдіть довжину дуги MKN .



Розв'язання:

I спосіб

Знайдемо градусну міру $\cup MKK$:

$$\cup MKN = 360^\circ - 220^\circ = 140^\circ$$

Дуга MKN складає $\frac{140}{360}$ частин кола, отже довжина дуги MKN :

$$18 \cdot \frac{140}{360} = 7 \text{ (см)}$$

II спосіб

$$C = 2\pi R$$

$$18 = 2\pi R$$

$$R = \frac{18}{2\pi} = \frac{9}{\pi} \text{ (см)}$$

$$\angle MKN = 360^\circ - 220^\circ = 140^\circ$$

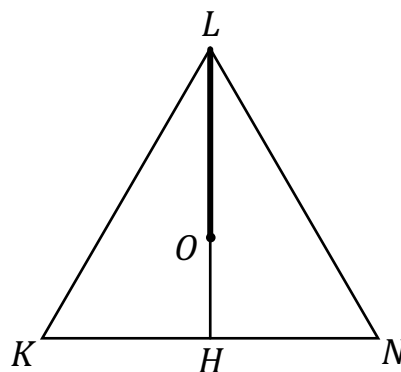
$$l_\alpha = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot \alpha$$

$$l_{140} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \frac{9}{\pi} \cdot 140 = 7 \text{ (см)}$$

Відповідь: 7 см

5. (1 б)

Трикутник KLN – правильний, його сторона дорівнює 15 см. Знайдіть радіус OL описаного навколо нього кола.



Розв'язання:

Скористаємося формулою радіуса описаного кола навколо правильного трикутника:

$$R = \frac{a_3\sqrt{3}}{3} = \frac{15\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3} \text{ (см)}$$

Відповідь: $5\sqrt{3}$ (см)

6. (2 б) Точка O – центр правильного восьмикутника $A_1A_2 \dots A_8$. Доведіть, що площі трикутників A_1OA_2 і A_1OA_4 рівні.

Розв'язання:

Використаємо формулу площі трикутника:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$$

$$S_1 = \frac{1}{2} OA_1 \cdot OA_2 \cdot \sin A_1OA_2$$

$$S_2 = \frac{1}{2} OA_1 \cdot OA_4 \cdot \sin A_1OA_4$$

$$OA_1 = OA_4 \left(\begin{array}{l} \text{як радіуси описаного} \\ \text{кола навколо} \\ \text{правильного} \\ \text{восьмикутника} \end{array} \right)$$

→ Для доведення рівності площ даних трикутників потрібно довести рівність синусів кутів A_1OA_2 і A_1OA_4

Знайдемо центральний кут правильного восьмикутника:

$$\gamma_8 = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

Кут A_1OA_2 дорівнює градусній мірі центрального кута, отже:

$$\angle A_1OA_2 = \gamma_8 = 45^\circ$$

Кут A_1OA_4 дорівнює градусній мірі трьох центральних кутів, отже:

$$\angle A_1OA_4 = \gamma_8 \cdot 3 = 45^\circ \cdot 3 = 135^\circ$$

Так як $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, то:

$$\sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ$$

$$\sin 135^\circ = \sin 45^\circ$$

Доведено

7. (3 б) Правильний восьмикутник вписаний у коло. Площа кругового сектора, що відповідає центральному куту восьмикутника, дорівнює 3π . Знайдіть площу восьмикутника.

Розв'язання:

Знайдемо центральний кут правильного восьмикутника:

$$\gamma_8 = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

Скористаємося формулою площі сектора круга:

$$S_{\alpha} = \frac{\pi r^2}{360^{\circ}} \cdot \alpha$$

$$S_{45} = \frac{\pi r^2}{360^{\circ}} \cdot 45^{\circ}$$

$$3\pi = \frac{45^{\circ}\pi r^2}{360^{\circ}} \rightarrow 45^{\circ}\pi r^2 = 3\pi \cdot 360^{\circ} \rightarrow r = \sqrt{\frac{3\pi \cdot 360^{\circ}}{45^{\circ}\pi}} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

Площа правильного восьмикутника (S_8) складається з площ 8 рівнобедрених трикутників (S_1), бічні сторони яких дорівнюють радіусу описаного кола навколо восьмикутника, а кут між бічними сторонами дорівнює градусній мірі центрального кута восьмикутника (γ_8). Отже:

$$S_8 = S_1 \cdot 8$$

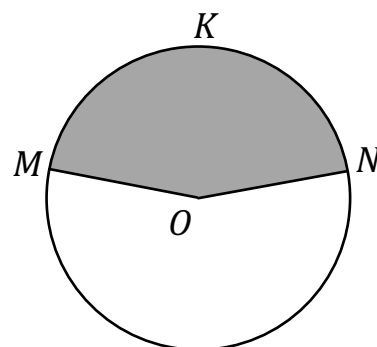
$$S_1 = \frac{1}{2}r^2 \cdot \sin \gamma_8 = \frac{(2\sqrt{6})^2 \cdot \sin 45^{\circ}}{2} = \frac{24 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = 6\sqrt{2}$$

$$S_8 = S_1 \cdot 8 = 6\sqrt{2} \cdot 8 = 48\sqrt{2}$$

Відповідь: $48\sqrt{2}$

4. (2 б)

На рисунку O – центр кола, $\angle MON = 160^\circ$, площа круга дорівнює 18 см^2 . Знайдіть площу сектора $OMKN$



Розв'язання:

I спосіб

$$S_{160} = \frac{S_{\text{круга}}}{360^\circ} \cdot 160^\circ = \frac{18}{360^\circ} \cdot 160^\circ = 8 \text{ (см}^2\text{)}$$

II спосіб

$$S = \pi r^2$$

$$18 = \pi r^2$$

$$r = \sqrt{\frac{18}{\pi}} \text{ (см)}$$

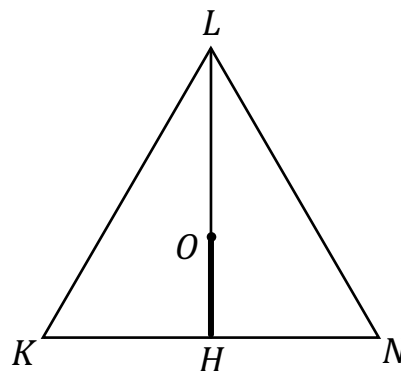
$$S_\alpha = \frac{\pi r^2}{360^\circ} \cdot \alpha$$

$$S_{160} = \frac{\pi \left(\sqrt{\frac{18}{\pi}} \right)^2}{360^\circ} \cdot 160^\circ = \frac{\pi \cdot \frac{18}{\pi}}{360^\circ} \cdot 160^\circ = 8 \text{ (см)}$$

Відповідь: 8 см

5. (1 б)

Трикутник KLN – правильний, його сторона дорівнює 24 см. Знайдіть радіус OH вписаного в нього кола.



Розв'язання:

Скористаємося формулою радіуса вписаного в правильний трикутник кола:

$$r = \frac{a_3 \sqrt{3}}{6} = \frac{24 \sqrt{3}}{6} = 4 \sqrt{3} \text{ (см)}$$

Відповідь: $4\sqrt{3}$ (см)

6. (2 б) Точка O – центр правильного дванадцятикутника $A_1A_2 \dots A_{12}$. Доведіть, що площі трикутників A_1OA_3 і A_2OA_7 рівні.

Розв'язання:

Використаємо формулу площі трикутника:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$$

$$S_1 = \frac{1}{2} OA_1 \cdot OA_3 \cdot \sin A_1OA_3$$

$$S_2 = \frac{1}{2} OA_2 \cdot OA_7 \cdot \sin A_2OA_7$$

$$OA_1 = OA_3 =$$

$$= OA_2 = OA_7 \left(\begin{array}{l} \text{як радіуси описаного} \\ \text{кола навколо} \\ \text{правильного} \\ \text{восьмикутника} \end{array} \right)$$

→ Для доведення рівності площ даних трикутників потрібно довести рівність синусів кутів A_1OA_3 і A_2OA_7

Знайдемо центральний кут правильного дванадцятикутника:

$$\gamma_{12} = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$$

Кут A_1OA_3 дорівнює градусній мірі двох центральних кутів, отже:

$$\angle A_1OA_3 = \gamma_{12} \cdot 2 = 30^\circ \cdot 2 = 60^\circ$$

Кут A_2OA_7 дорівнює градусній мірі п'ятьох центральних кутів, отже:

$$\angle A_2OA_7 = \gamma_{12} \cdot 5 = 30^\circ \cdot 5 = 150^\circ$$

Так як $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, то:

$$\sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ$$

$$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ$$

Доведено

7. (3 б) Правильний шестикутник вписаний у коло. Площа кругового сектора, що відповідає центральному куту шестикутника, дорівнює 3π . Знайдіть площу восьмикутника.

Розв'язання:

Знайдемо центральний кут правильного восьмикутника:

$$\gamma_8 = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

Скористаємося формулою площі сектора круга:

$$S_\alpha = \frac{\pi r^2}{360^\circ} \cdot \alpha$$

$$S_{60} = \frac{\pi r^2}{360^\circ} \cdot 60^\circ$$

$$3\pi = \frac{60^\circ \pi r^2}{360^\circ} \rightarrow 60^\circ \pi r^2 = 3\pi \cdot 360^\circ \rightarrow r = \sqrt{\frac{3\pi \cdot 360^\circ}{60^\circ \pi}} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Площа правильного шестикутника (S_6) складається з площ 6 рівнобедрених трикутників (S_1), бічні сторони яких дорівнюють радіусу описаного кола навколо шестикутника, а кут між бічними сторонами дорівнює градусній мірі центрального кута шестикутника (γ_6). Отже:

$$S_6 = S_1 \cdot 6$$

$$S_1 = \frac{1}{2} r^2 \cdot \sin \gamma_6 = \frac{(3\sqrt{2})^2 \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 4,5\sqrt{3}$$

$$S_8 = S_1 \cdot 6 = 4,5\sqrt{3} \cdot 6 = 27\sqrt{3}$$

Відповідь: $27\sqrt{3}$