Тема: Радіуси вписаного і описаного кіл правильного многокутника
Мета:

- *Навчальна:* вивести формули радіусів вписаних і описаних кіл правильного многокутника; вивести формули радіусів вписаних і описаних кіл правильного трикутника, чотирикутника і шестикутника;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння стисло та доречно висловлювати свої міркування та обґрунтовувати їхню правильність; розвивати вміння знаходити радіуси вписаних і описаних кіл правильних многокутників;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук;

Компетенції:

- математичні
- комунікативні

Тип уроку: засвоєння нових знань;
Обладнання: конспект, презентація, мультимедійне обладнання;

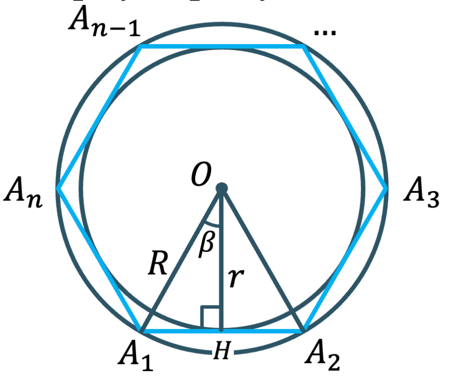
Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

II. Вивчення нового матеріалу

// Формули радіусів вписаного і описаного кіл правильного многокутника



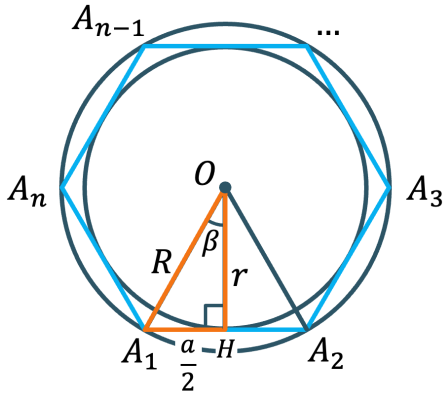
- Поясніть, як знайти градусну міру кута A_1OH і довжину A_1H?

$$\left.\begin{array}{c}\angle A_1OA_2 = \dfrac{360°}{n} \\ OH - \text{бісектриса} \\ \text{і медіана}\end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{c}\beta = \dfrac{180°}{n} \\ A_1H = \dfrac{a_n}{2}\end{array}$$

Розглянемо ΔOHA_1 ($\angle H = 90°$):

- Поясніть, як знайти значення синуса кута β?

(За означенням синуса гострого кута прямокутного трикутника)



$$\sin\beta = \frac{\frac{a_n}{2}}{R} \rightarrow R = \frac{a_n}{2} : \sin\beta = \frac{a_n}{2\sin\beta} \rightarrow \boldsymbol{R} = \frac{\boldsymbol{a_n}}{\mathbf{2}\sin\frac{\mathbf{180^\circ}}{\boldsymbol{n}}} \left(\begin{matrix} \textit{Радіус} \\ \textbf{\textit{описаного}} \\ \textit{кола} \end{matrix}\right)$$

- Поясніть, як знайти значення тангенса кута β?
  (*За означенням тангенса гострого кута прямокутного трикутника*)

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\frac{a_n}{2}}{r} \rightarrow r = \frac{a_n}{2} : \operatorname{tg}\beta = \frac{a_n}{2\operatorname{tg}\beta} \rightarrow \boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{a_n}}{\mathbf{2}\operatorname{tg}\frac{\mathbf{180^\circ}}{\boldsymbol{n}}} \left(\begin{matrix} \textit{Радіус} \\ \textbf{\textit{вписаного}} \\ \textit{кола} \end{matrix}\right)$$

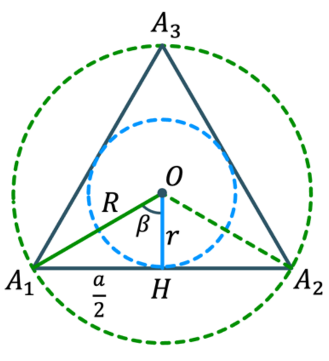
- Виразіть самостійно радіус вписаного кола через радіус описаного кола
  *(Так як **косинус** гострого кута прямокутного трикутника – це **відношення прилеглого катета до гіпотенузи**, а **наші радіуси вписаного і описаного кіл є відповідно катетом і гіпотенузою**, то можемо скористатися означенням косинуса гострого кута прямокутного трикутника)*

$$\cos\beta = \frac{r}{R} \rightarrow r = R\cos\beta \rightarrow \boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}\cos\frac{\mathbf{180^\circ}}{\boldsymbol{n}} \left(\begin{matrix} \textit{Радіус} \\ \textbf{\textit{вписаного}} \\ \textit{кола} \end{matrix}\right)$$

Накресліть в зошиті таку таблицю:

Формула	Трикутник $n = 3$	Чотирикутник $n = 4$	Шестикутник $n = 6$
$R = \dfrac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$			
$r = \dfrac{a_n}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$			
$r = R\cos\dfrac{180^\circ}{n}$			

// Формули радіусів вписаного і описаного кіл правильного трикутника



Знайдемо радіус вписаного кола:

$$\boldsymbol{r} = \frac{a_3}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{3}} = \frac{a_3}{2\,tg\,60^\circ} = \frac{a_3}{2\sqrt{3}} = \frac{\boldsymbol{a_3}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{6}}$$

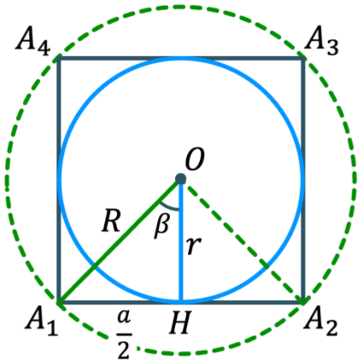
Знайдемо радіус описаного кола:

$$\boldsymbol{R} = \frac{a_3}{2\sin\frac{180^\circ}{3}} = \frac{a_3}{2\sin 60^\circ} = \frac{a_3}{2\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a_3}{\sqrt{3}} = \frac{\boldsymbol{a_3}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}}$$

Знайдемо радіус вписаного кола за допомогою радіуса описаного кола:

$$\boldsymbol{r} = R\,cos\frac{180^\circ}{3} = R\,cos\,60^\circ = R\cdot\frac{1}{2} = \frac{\boldsymbol{R}}{\mathbf{2}}$$

// Формули радіусів вписаного і описаного кіл правильного чотирикутника



Знайдемо радіус вписаного кола:

$$\boldsymbol{r} = \frac{a_4}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{4}} = \frac{a_4}{2\,tg\,45^\circ} = \boldsymbol{\frac{a_4}{2}}$$

Знайдемо радіус описаного кола:

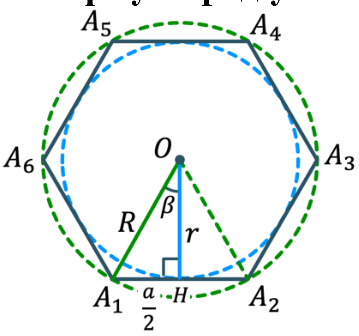
$$\boldsymbol{R} = \frac{a_4}{2\sin\frac{180^\circ}{4}} = \frac{a_4}{2\sin 45^\circ} = \frac{a_4}{2\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a_4}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{a_4\sqrt{2}}{2}}$$

Знайдемо радіус вписаного кола за допомогою радіуса описаного кола:

$$\boldsymbol{r} = R\cos\frac{180^\circ}{4} = R\cos 45^\circ = \boldsymbol{\frac{R\sqrt{2}}{2}}$$

Занесемо отримані формули до таблиці

// Формули радіусів вписаного і описаного кіл правильного шестикутника



Знайдемо радіус вписаного кола:

$$\boldsymbol{r} = \frac{a_6}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{6}} = \frac{a_6}{2\operatorname{tg}30^\circ} = \boldsymbol{\frac{a_6\sqrt{3}}{2}}$$

Знайдемо радіус описаного кола:

$$\boldsymbol{R} = \frac{a_6}{2\sin\frac{180^\circ}{6}} = \frac{a_6}{2\sin 30^\circ} = \frac{a_6}{2\frac{1}{2}} = \boldsymbol{a_6}$$

Знайдемо радіус вписаного кола за допомогою радіуса описаного кола:

$$\boldsymbol{r} = R\cos\frac{180^\circ}{6} = R\cos 30^\circ = \boldsymbol{\frac{R\sqrt{3}}{2}}$$

- Саме через те, що радіус описаного кола навколо будь-якого шестикутника дорівнює його стороні, ми можемо так просто побудувати правильний шестикутник, вписаний у коло.

Занесемо отримані формули до таблиці

Запам'ятовувати ці формули не обов'язково, але **треба вміти їх виводити:**

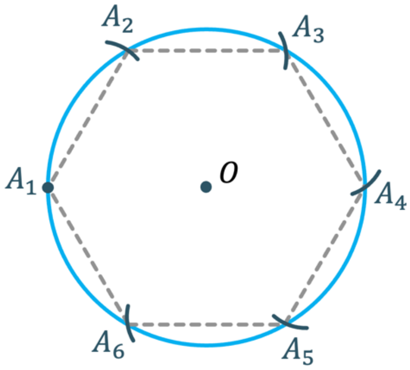
Формула	**Трикутник** $\boldsymbol{n=3}$	**Чотирикутник** $\boldsymbol{n=4}$	**Шестикутник** $\boldsymbol{n=6}$
$\boldsymbol{R = \frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}}$	$R = \frac{a_3\sqrt{3}}{3}$	$R = \frac{a_4\sqrt{2}}{2}$	$R = a_6$
$\boldsymbol{r = \frac{a_n}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}}$	$r = \frac{a_3}{2\sqrt{3}} = \frac{a_3\sqrt{3}}{6}$	$r = \frac{a_4}{2}$	$r = \frac{a_6\sqrt{3}}{2}$
$\boldsymbol{r = R\cos\frac{180^\circ}{n}}$	$r = \frac{R}{2}$	$r = \frac{R\sqrt{2}}{2}$	$r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

III. Розв’язування завдань

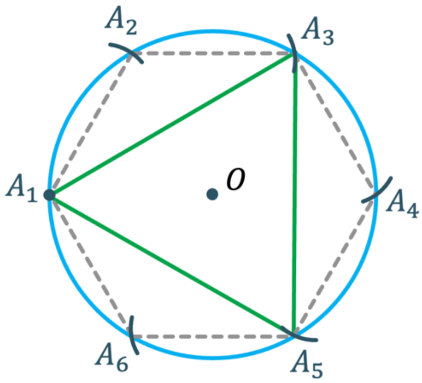
№1

Побудуйте правильний трикутник, вписаний у коло

Розв’язання:



1. Будуємо правильний шестикутник, вписаний у коло (*побудову такого шестикутника розглянуто на минулому уроці)*



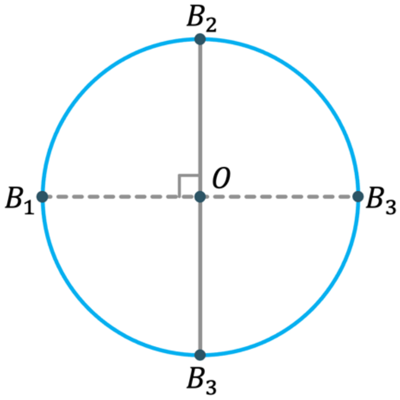
2. Сполучимо вершини правильного вписаного шестикутника через одну

   $A_1A_3A_5$ – правильний трикутник, вписаний у коло

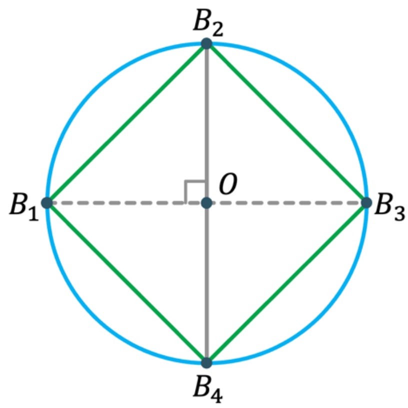
№2

Побудуйте правильний чотирикутник, вписаний у коло

Розв’язання:



1. Будуємо через центр кола дві взаємно перпендикулярні прямі



2. Сполучимо отримані точки перетину побудованих прямих з колом

   $B_1B_2B_3B_4$ – правильний чотирикутник, вписаний у коло

№3

Сторона правильного трикутника дорівнює $8\sqrt{3}$. Знайдіть радіуси вписаного і описаного навколо нього кіл.

Розв'язання:

За виведеними формулами для правильного трикутника:

$$r = \frac{a_3}{2\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 4$$

$$R = \frac{a_3\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{3} = \frac{8\cdot 3}{3} = 8$$

Відповідь: $r = 4; R = 8$

№4

Знайдіть радіус вписаного і описаного кіл навколо правильного шестикутника, якщо його периметр дорівнює 24 см

Розв'язання:

Так як радіус кола, описаного навколо правильного шестикутника, дорівнює його стороні, то:

$$R = a_6 = \frac{P_6}{6} = \frac{24}{6} = 4 \text{ см}$$

Радіус кола, вписаного в правильний шестикутник, знайдемо за виведеною формулою:

$$r = \frac{a_6}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ см}$$

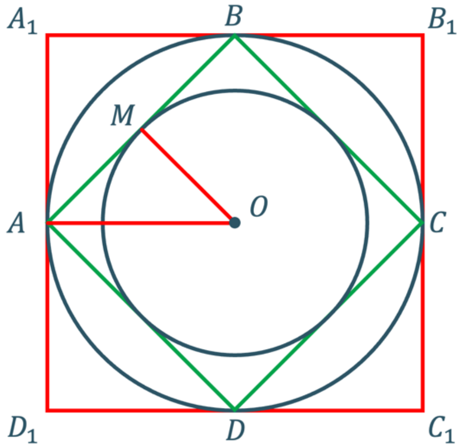
Відповідь: $R = 4$ см; $r = 2$ см

№5

Периметр квадрата, вписаного в коло, дорівнює 12 см. Обчисліть:

1) Радіус цього кола
2) Радіус кола, вписаного в даний квадрат
3) Периметр квадрата, описаного навколо цього кола

Розв'язання:



1) Знайдемо OA. Для квадрата $ABCD$ це коло – описане, тому:

$$a_{ABCD} = \frac{P_{ABCD}}{4} = \frac{12}{4} = 3 \text{ см}$$

$$OA = R = \frac{a_{ABCD}\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ см}$$

2) Знайдемо OM. Для квадрата $ABCD$ це коло – вписане, тому:

$$OM = r = \frac{a_{ABCD}}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \text{ см}$$

3) Знайдемо периметр квадрата $A_1B_1C_1D_1$. Так як коло $(O; OA)$ для квадрата квадрата $A_1B_1C_1D_1$ є вписаним, то:

$$\left.\begin{aligned} OA = r &= \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ см} \\ r &= \frac{a_{A_1B_1C_1D_1}}{2} \end{aligned}\right| \rightarrow \frac{a_{A_1B_1C_1D_1}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \rightarrow a_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{3\sqrt{2}\cdot 2}{2} = 3\sqrt{2} \text{ см}$$

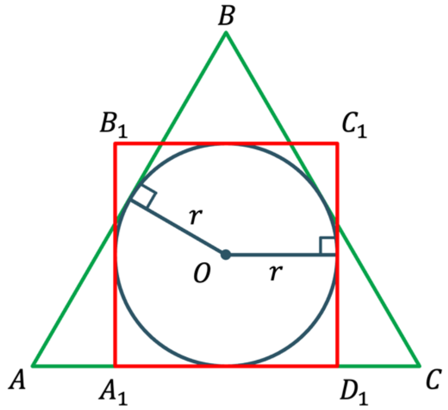
$$P_{A_1B_1C_1D_1} = 4 \cdot a_{A_1B_1C_1D_1} = 4 \cdot 3\sqrt{2} = 12\sqrt{2} \text{ см}$$

Відповідь: 1) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ см; 2) 1,5 см; 3) $12\sqrt{2}$ см

№6

Периметр правильного трикутника, описаного навколо кола, дорівнює $18\sqrt{3}$ см. Обчисліть площу квадрата, описаного навколо цього кола.

Розв'язання:



Радіуси вписаних кіл для даних трикутника і квадрата рівні, так як це одне і те саме коло.

Розглянемо правильний ΔABC:

$$a_{ABC} = \frac{P_{ABC}}{3} = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3} \text{ см}$$

$$r = \frac{a_{ABC}}{2\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 3 \text{ см}$$

Знайдемо сторону квадрата через радіус вписаного кола у цей квадрат:

$$r = \frac{a_{A_1B_1C_1D_1}}{2}$$

$$a_{A_1B_1C_1D_1} = 2r = 2 \cdot 3 = 6 \text{ см}$$

Знайдемо площу квадрата:

$$S_{A_1B_1C_1D_1} = a^2_{A_1B_1C_1D_1} = 6^2 = 36 \text{ см}^2$$

Відповідь: 36 см^2

№7

Радіус кола, описаного навколо правильного многокутника, дорівнює 10 см, а радіус вписаного в нього кола - $5\sqrt{2}$ см. Знайдіть кількість сторін многокутника та його сторону.

Розв'язання:

Скористаємося формулою залежності між радіусами вписаного і описаного кіл навколо правильного многокутника:

$$r = R\cos\frac{180°}{n}$$

$$5\sqrt{2} = 10\cos\frac{180°}{n}$$

$$\cos\frac{180°}{n} = \frac{5\sqrt{2}}{10}$$

$$\cos\frac{180°}{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{180°}{n} = 45°$$

$$n = \frac{180°}{45°} = 4$$

Так як кількість сторін даного правильного чотирикутника – 4, то скористаємося формулою радіуса вписаного кола у правильний чотирикутник:

$$r = \frac{a_4}{2}$$

$$4 = \frac{a_4}{2}$$

$$a_4 = 2 \cdot 4 = 8 \text{ см}$$

Відповідь: $n = 4$; $a_4 = 8$ см

IV. Підсумок уроку

- Який найбільший центральний кут може мати правильний многокутник?
- Чому будь-який правильний чотирикутник – квадрат?
- Чи дорівнює центральний кут многокутника будь-якому зовнішньому куту цього многокутника?
- Чи будь-який опуклий многокутник з усіма рівними сторонами – правильний многокутник? Чому?
- Чи можна навколо будь-якого правильного многокутника описати коло?
- Чи можна у будь-який правильний многокутник вписати коло?

V. Домашнє завдання

Опрацювати §15

Виконати № 736, 746, 747