Тема: Правильний многокутник, його види та властивості. Правильний многокутник, вписаний у коло та описаний навколо кола.

Мета:

- *Навчальна:* сформувати поняття правильного многокутника, кута многокутника, центрального кута многокутника, зовнішнього кута многокутника;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння стисло та доречно висловлювати свої міркування та обґрунтовувати їхню правильність; розвивати вміння знаходити градусну міру кутів многокутника (внутрішній, центральний, зовнішній)
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук;

Компетенції:

- математичні
- комунікативні

Тип уроку: засвоєння нових знань;

Обладнання: конспект, презентація, мультимедійне обладнання;

Хід уроку

I. Організаційний етап

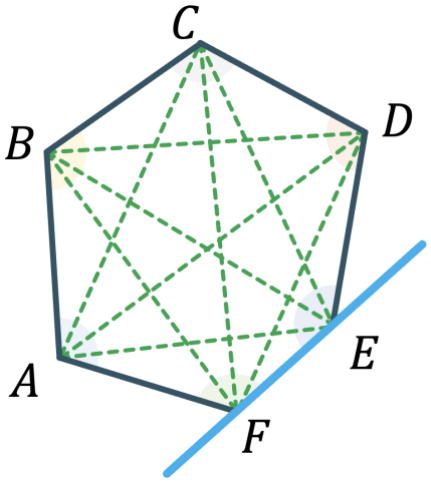
- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

II. Вивчення нового матеріалу

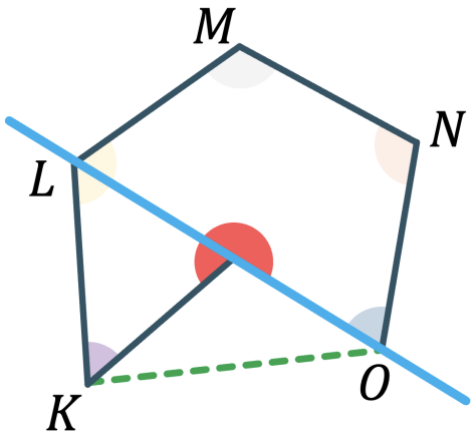
// Придагаємо матеріал 8 і 7 класів

➢ Які многокутники називаються опуклими, а які не опуклими?

ОПУКЛИЙ



НЕОПУКЛИЙ



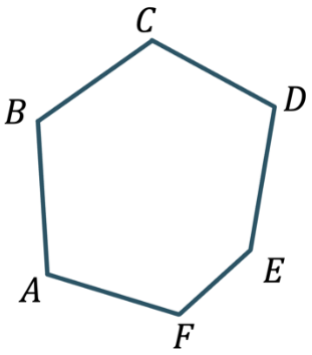
➢ Які відмінності ви можете помітити між цими многокутниками?

Завжди лежить по один бік від будь-якої прямої, яка містить його сторону;

Має кут, більший за 180°;

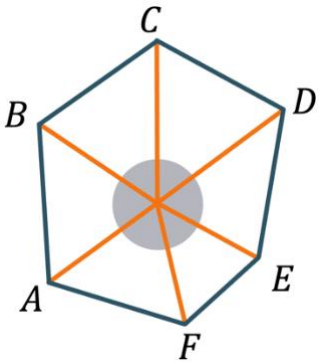
Може не містити у собі діагональ;

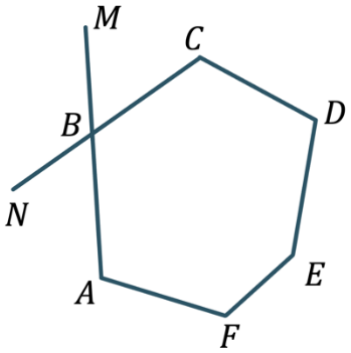
- Пригадайте, як знайти градусну міру суми внутрішніх кутів опуклого многокутника?



Сума кутів опуклого n – кутника дорівнює $180°(n-2)$

- Якщо зможете зараз пригадати, як ми доводили цю теорему у 8 класі, то отримаєте +2 б за роботу на уроці
(Учні висловлюють власну думку)

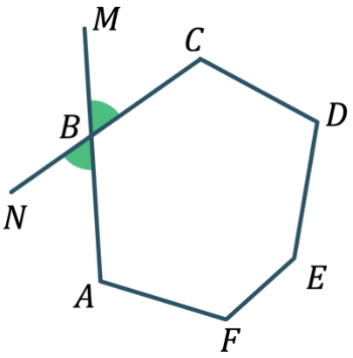




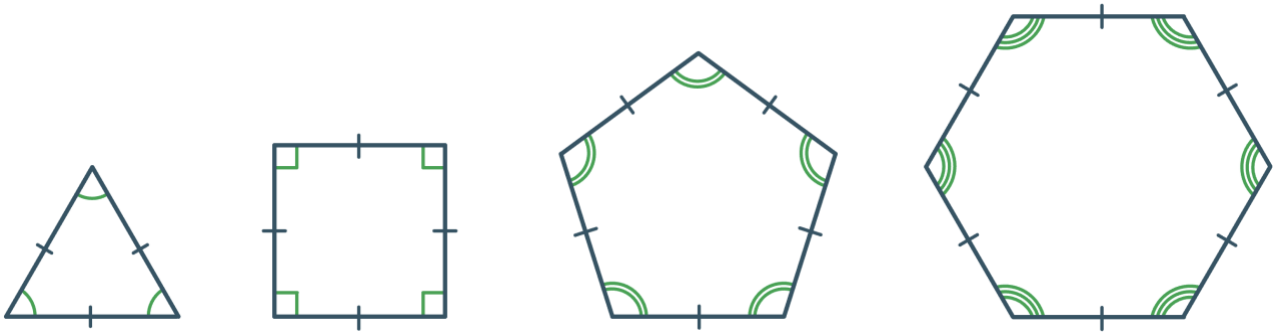
- Назвіть всі зображені на рисунку зовнішні кути цього многокутника

  ($\angle MBC$ і $\angle NBA$)

- Чому зовнішні кути, взяті при одній вершині, завжди будуть рівними?
(За теоремою про вертикальні кути, геометрія 7 клас)



- Пригадайте, чому дорівнює сума градусних мір кутів многокутника, взятих по одному при кожній вершині?
($360°$)



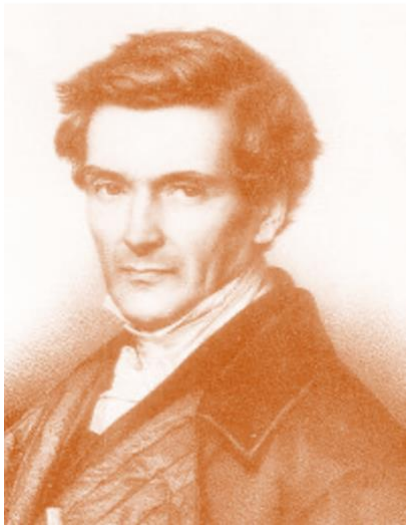
Правильний многокутник – це опуклий многокутник, у якого всі сторони між собою рівні і всі кути між собою рівні.

- Як на вашу думку, скільки можна побудувати правильних многокутників? *(Учні висловлюють власну думку)*

Гермес Іоган Густав
1894 року **побудував 65537-кутник** та описав його побудову більш ніж на 200 сторінках

З цього приводу Джон Літлвуд **пожартував**: «Один нав'язливий аспірант дістав свого керівника, і той сказав йому: — **Йдіть-но і розробіть спосіб побудови правильного 65537-кутника! Аспірант пішов і повернувся тільки через 20 років»**

Йоганн Карл Фрідріх Гаусс 1836 довів, що **правильний n-кутник можна побудувати циркулем та лінійкою, якщо непарні прості дільники n є різними числами Ферма**



П'єр Лоран Ванцель 1836 **довів, що інших правильних многокутників, які можна побудувати циркулем та лінійкою, не існує.**

// Кути правильних многокутників

- З 8-го класу ви вже знаєте формулу для занаходження суми кутів опуклого n – кутника. Поясніть, як за допомогою неї знайти градусну міру кута правильного многокутника?

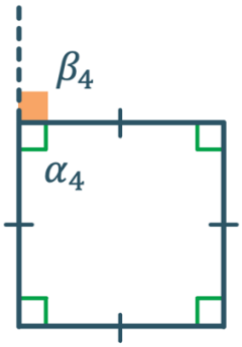
  (Сума кутів довільного опуклого n – кутника дорівнює $180°(n-2)$, так як у правильного многокутника всі кути рівні, то цю суму необхідно поділити на кількість його кутів, тобто на n)

  Внутрішній кут правильного многокутника: $\boldsymbol{\alpha_n = \frac{180°(n-2)}{n}}$

- З 8-го класу ви вже знаєте, чому дорівнює сума зовнішніх кутів опуклого многокутника, взятих по одному при кожній вершині. Поясніть, як знайти градусну міру зовнішнього кута правильного многокутника?

  Зовнішній кут правильного многокутника: $\boldsymbol{\beta_n = \frac{360°}{n}}$

Знайдемо за допомогою цих формул, наприклад, внутрішні і зовнішку кути правильних чотирикутника і шестикутника:

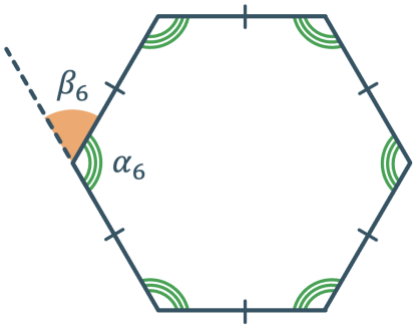


$$\alpha_4 = \frac{180°(4-2)}{4} = 90°$$

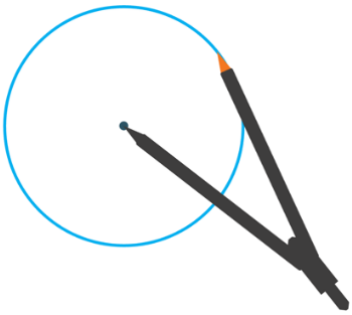
$$\beta_4 = \frac{360°}{4} = 90°$$

$$\alpha_6 = \frac{180°(6-2)}{6} = 120°$$

$$\beta_6 = \frac{360°}{6} = 60°$$

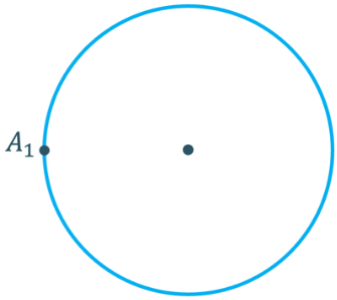


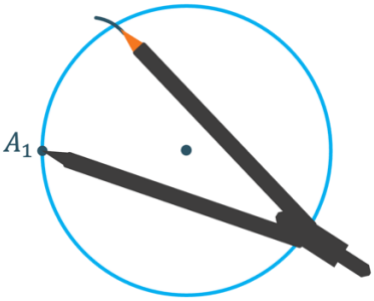
// Побудова правильного шестикутника, вписаного і описаного навколо кола

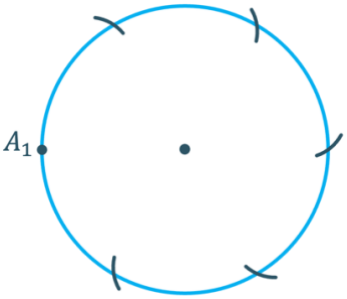


1. Побудуємо довільне коло

2. Позначимо на колі довільну точку A_1 - одну з вершин правильного шестикутника.

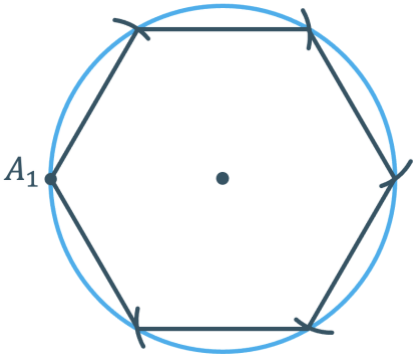


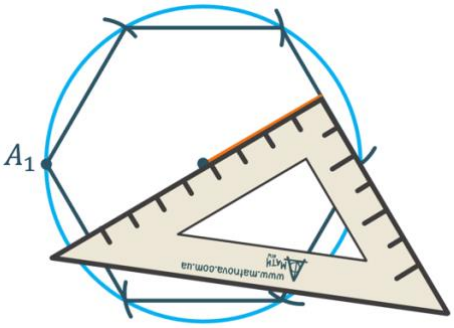




3. З точки A_1, радіусом, що дорівнює радіусу кола, зробимо на колі засічки

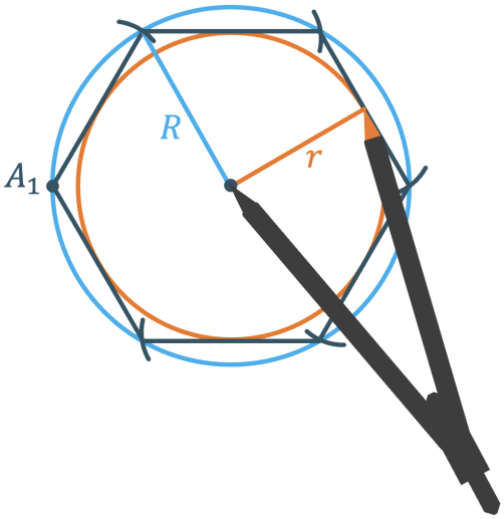
4. Сполучимо послідовно отримані точки на колі відрізками за допомогою лінійки





5. Проведемо перпендикуляр з центра кола до будь-якої сторони шестикутника. Отриманий перпендикуляр – радіус вписаного кола.

6. Побудуємо вписане коло у правильний шестикутник

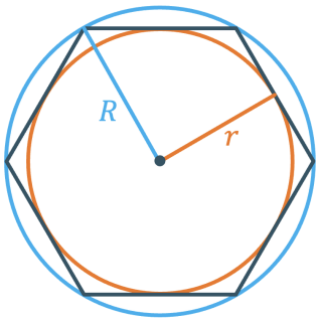


**На наступному уроці ми з Вами розберемося, чому саме в такий спосіб можна побудувати правильний шестикутник, а також як побудувати інші правильні многокутники.*

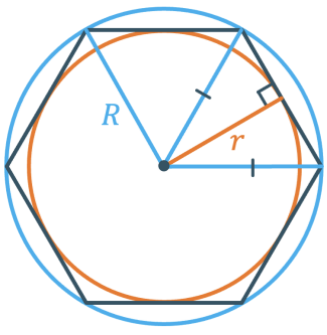
// Вписане і описане кола правильного многокутника

Теорема *(про вписане й описане кола правильного многокутника)*

Навколо будь-якого правильного многокутника можна описати коло, і в будь-який правильний многокутник можна вписати коло, причому центри описаного і вписаного кіл збігаються



➢ Дивлячись на рисунок, що можемо сказати про точку дотику вписаного кола до сторін правильного многокутника?



(Отримали рівнобедрений трикутник з бічною стороною R.

Так як радіус вписаного кола перпендикулярний до сторони, до якої

дотикається, то r – висота цього трикутника.

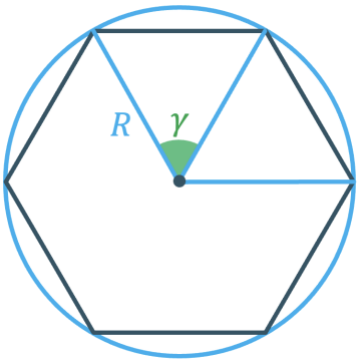
Так як висота рівнобедреного трикутника є також медіаною, то коло, що вписане у правильний многокутник, дотикається до сторін многокутника у їх серединах)

Наслідок

Коло, вписане у правильний многокутник, дотикається до сторін многокутника у їх серединах.

**За бажанням цю теорему можна довести за підручником на додаткових уроках чи гуртках.*

// Центральний кут правильного многокутника



Центральний кут – це кут між двома радіусами описаного кола, кінцями яких є сусідні вершини правильного многокутника.

γ – центральний кут

Так як сума всіх центральних кутів утворює коло і всі центральні кути рівні між собою, то:

$$\boldsymbol{\gamma_n = \frac{360^\circ}{n}}$$

Знайдемо градусну міру кута правильного шестикутника:

$$\gamma_6 = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

III. Розв'язування завдань

№1

Знайдіть градусну міру кута:

1) Правильного п'ятикутника
2) Правильного десятикутника
3) Правильного вісімнадцятикутника

Розв'язання:

1) Правильного п'ятикутника

$$\alpha_5 = \frac{180^\circ(5-2)}{5} = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$$

2) Правильного десятикутника

$$\alpha_{10} = \frac{180^\circ(10-2)}{10} = \frac{1440^\circ}{10} = 144^\circ$$

3) Правильного вісімнадцятикутника

$$\alpha_{18} = \frac{180°(18-2)}{18} = \frac{2880°}{18} = 160°$$

№2

Скільки сторін має правильний многокутник, якщо градусна міра його кута дорівнює:

1) $135°$ 2) $144°$
3) $156°$

Розв'язання:

$$\alpha_n = \frac{180°(n-2)}{n}$$
$$\alpha_n \cdot n = 180°(n-2) = 180° \cdot n - 360°$$
$$\alpha_n \cdot n - 180° \cdot n = -360°$$
$$180° \cdot n - \alpha_n \cdot n = 360°$$
$$n(180° - \alpha_n) = 360°$$
$$n = \frac{360°}{180° - \alpha_n}$$

1) $a_n = 135°$

$$n = \frac{360°}{180° - \alpha_n} = \frac{360°}{180° - 135°} = \frac{360°}{45°} = 8$$

Восьмикутник

2) $144°$

$$n = \frac{360°}{180° - \alpha_n} = \frac{360°}{180° - 144°} = \frac{360°}{36°} = 10$$

Десятикутник

3) $156°$

$$n = \frac{360°}{180° - \alpha_n} = \frac{360°}{180° - 156°} = \frac{360°}{24°} = 15$$

П'ятнадцятикутник

№3

Центральний кут правильного многокутника дорівнює $30°$. Знайдіть кількість сторін многокутника.

Розв'язання:

$$\gamma_n = \frac{360°}{n}$$
$$n = \frac{360°}{\gamma_n} = \frac{360°}{30°} = 12$$

Відповідь: 12

№4

Скільки сторін має правильний многокутник, якщо кожний із його зовнішніх кутів дорівнює:

1) $60°$
2) $24°$

Розв'язання:

1) $60°$

$$\beta_n = \frac{360°}{n}$$
$$60° = \frac{360°}{n}$$
$$n = \frac{360°}{60°} = 6$$

2) $24°$

$$\beta_n = \frac{360°}{n}$$
$$24° = \frac{360°}{n}$$
$$n = \frac{360°}{24°} = 15$$

Відповідь: 1) шість сторін; 2) п'ятнадцять сторін

№5

Сума градусних мір двох кутів правильного многокутника дорівнює $324°$, а його периметр дорівнює 240 см. Знайдіть довжину сторони даного многокутника.

Розв'язання:

Так як в многокутника всі кути рівні, то градусна міра його кута:

$$324°:2 = 162°$$

Далі аналогічно да задачі №2 з'ясуємо скільки кутів, а отже і сторін, має цей многокутник:

$$n = \frac{360°}{180° - \alpha_n} = \frac{360°}{180° - 162°} = \frac{360°}{18°} = 20$$

Двадцятикутник

Так як периметир даного двадцятикутника дорівнює 240 см, то його одна сторона дорівнює:

$$\frac{240}{20} = 12 \text{ см}$$

Відповідь: 12 см

№6

Поверхня м'яча зшита з правильних чорних п'ятикутників і білих шестикутників. Відомо, що всього чорних п'ятикутників 12. Знайдіть за допомогою математичних обчислень число білих шестикутників на поверхні м'яча, а потім переконайтеся у своїй правоті на уроці фізкультури.

Розв'язання:

Кожен п’ятикутник має спільне ребро з 5-ма шестикутниками і при цьому кожен шестикутник має спільне ребро з 3-ма п’ятикутниками, отже кількість шестикутників можемо знайти так:

$$\text{К-ть шестикутників} = \frac{12 \cdot 5}{3} = \frac{60}{3} = 20$$

IV. Підсумок уроку

- Який многокутник називається правильним?
- За якою формулою можна знайти кут многокутника?
- За якою формулою можна знайти центральний кут многокутника?
- За якою формулою можна знайти зовнішній кут многокутника?
- Сформулюйте теорему про вписане й описане кола правильного многокутника
- Чи будь-який опуклий многокутник є правильним?

V. Домашнє завдання

Опрацювати §15 (ст.139-142)
Виконати № 720, 722, 727, 731