

Тема: Формули для знаходження площі трикутника

Мета:

- *Навчальна:* засвоїти формули для знаходження площі трикутника;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння стисло та доречно висловлювати свої міркування та обґрунтовувати їхню правильність;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук;

Компетенції:

- математичні
- комунікативні

Тип уроку: засвоєння нових знань;

Обладнання: конспект, презентація, мультимедійне обладнання;

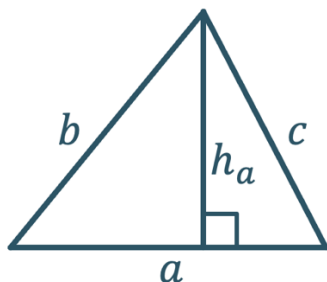
Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

II. Вивчення нового матеріалу

// Формули для знаходження площі трикутника



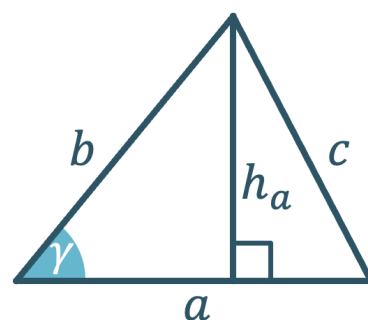
- За якою формулою ви вже знаходили площу трикутника у 8 класі?

$$S = \frac{1}{2} a h_a$$

- Спробуйте виразити висоту h_a через синус кута γ і отримане значення підставити у відому Вам формулу

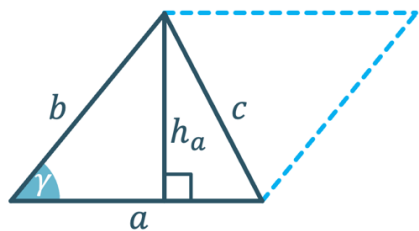
$$\sin \gamma = \frac{h_a}{b} \rightarrow h_a = b \sin \gamma$$

$$S = \frac{1}{2} a h_a \quad \left| \begin{array}{l} h_a = b \sin \gamma \end{array} \right. \rightarrow S = \frac{1}{2} a b \sin \gamma$$



- 1. Формула площі трикутника за двома сторонами і кутом між ними**
Площа трикутника дорівнює половині добутку двох його сторін на синус кута між ними

$$S = \frac{1}{2} a b \sin \gamma$$



- Пригадайте формулу площі паралелограма, як тепер інакше можемо її записати?
(Площа паралелограма дорівнює добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони $S = ah_a$)

НАСЛІДОК

Площа паралелограма дорівнює добутку двох його сторін на синус кута між ними.

$$S_{\text{паралелограма}} = ab \sin \gamma$$

2. Формула Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} - \text{півпериметр трикутника}$$

- Поясніть, як знаючи тільки сторони трикутника знайти будь-яку його сторону?

Висоту, що проведена до певної сторони можна виразити з відомої нам формули площі трикутника, а саму площу можна знайти за формулою Герона.

$$h_a = \frac{2S}{a}$$

НАСЛІДОК

Найбільшою висотою є та, що проведена до найменшої сторони; найменшою висотою є та, що проведена до найбільшої сторони

3. Формула площі трикутника за радіусом описаного кола

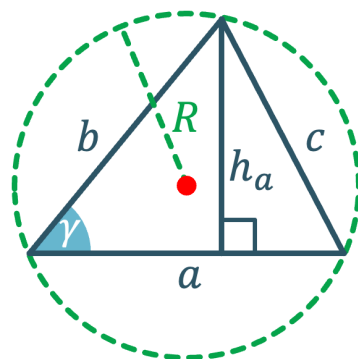
$$S = \frac{abc}{4R}$$

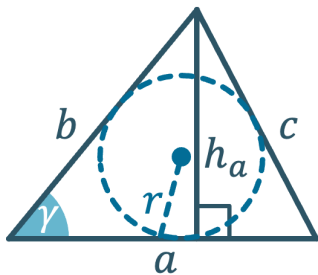
R – радіус кола, описаного навколо трикутника.

- Виразіть з цієї формули радіус описаного кола

Формула для обчислення радіуса описаного кола навколо довільного трикутника:

$$R = \frac{abc}{4S}$$





4. Формула площі трикутника за радіусом вписаного кола

$$S = rp$$

r – радіус кола, вписаного у трикутник;

$$p = \frac{a + b + c}{2} \text{ – півпериметр трикутника;}$$

НАСЛІДОК

Площу S будь-якого описаного багатокутника можна знайти за формулою:

$$S_{\text{описаного багатокутника}} = rp$$

r – радіус кола, вписаного у багатокутник;

p – півпериметр багатокутника;

**За бажанням ці формули і наслідки можна довести за підручником на додаткових уроках чи гуртках.*

Можливий запис у зошиті:

1. Формула площі трикутника за двома сторонами і кутом між ними

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$

НАСЛІДОК:

$$S_{\text{паралелограма}} = ab \sin \gamma$$

2. Формула Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

p – півпериметр трикутника

НАСЛІДОК:

$$h_a = \frac{2S}{a}$$

Найбільшою висотою трикутника є та, що проведена до найменшої сторони

3. Формула площі трикутника за радіусом описаного кола

$$S = \frac{abc}{4R}$$

R – радіус описаного кола навколо трикутника

Формула для обчислення радіуса описаного кола навколо довільного трикутника:

$$R = \frac{abc}{4S}$$

3. Формула площі трикутника за радіусом вписаного кола

$$S = rp$$

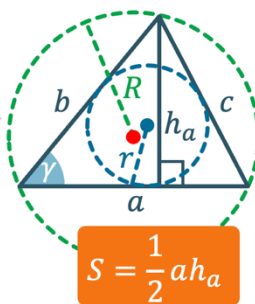
r – радіус кола, вписаного у трикутник

p – півпериметр трикутника

НАСЛІДОК:

$$S_{\text{описаного багатокутника}} = rp$$

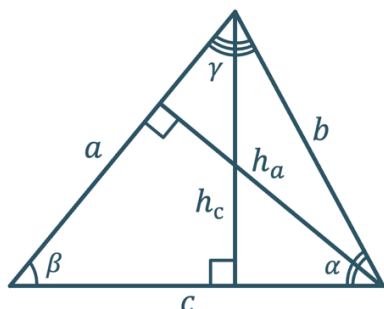
r – радіус кола, вписаного у багатокутник
 p – півпериметр багатокутника



$$S = \frac{1}{2}ah_a$$

III. Розв'язування завдань

№1



Укажіть формули, за якими можна знайти площу трикутника:

1) $S = ac \sin \beta$ 4) $S = p(p-a)(p-b)(p-c)$

2) $S = \frac{1}{2}ah_c$ 5) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

3) $S = \frac{1}{2}ch_c$ 6) $S = \frac{1}{2}cb \sin \alpha$

№2

m і n – сторони трикутника, γ – кут між ними. Знайдіть площу трикутника, якщо:

- 1) $m = 4$ см, $n = 7$ см, $\gamma = 30^\circ$
- 2) $m = 6$ см, $n = 8$ см, $\gamma = 135^\circ$

Розв'язання:

$$S = \frac{1}{2} mn \sin \gamma$$

- 1) $S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 \cdot \sin 30^\circ = 14 \cdot \frac{1}{2} = 7 \text{ см}^2$
- 2) $S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \sin 135^\circ = 48 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 24\sqrt{2} \text{ см}^2$

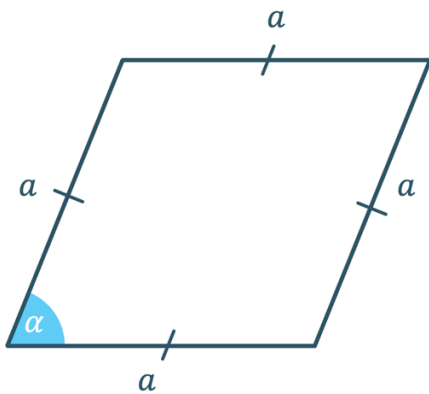
Відповідь: 1) 7 см^2 ; 2) $24\sqrt{2} \text{ см}^2$

№3

Обчисліть площу ромба:

- 1) Сторона якого дорівнює 8 см, а гострий кут – 30°
- 2) Сторона якого дорівнює 10 см, а тупий кут 120°

Розв'язання:



➤ Доведіть, що формула площі ромба
 $S_{\text{ромб}} = a^2 \sin \alpha$

Ромб – це паралелограм, у якого всі сторони рівні.

Отже:

$$S = a \cdot a \cdot \sin \alpha = a^2 \sin \alpha$$

- 1) $S = 8^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{64}{2} = 32 \text{ см}^2$
- 2) $S = 10^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{100\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3} \text{ см}^2$

Відповідь: 1) 32 см^2 ; 2) $50\sqrt{3} \text{ см}^2$

№4

А) Знайдіть площу трикутника, сторони якого дорівнюють:

- 1) 13 см, 14 см, 15 см
- 2) 17 см, 25 см, 26 см

Б) Знайдіть найменшу висоту першого трикутника і найбільшу висоту другого трикутника

Розв'язання:

Знайдемо площу за допомогою формули Герона.

- 1) 13 см, 14 см, 15 см

$$p = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21 \text{ см}$$

$$S = \sqrt{21(21 - 13)(21 - 14)(21 - 15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7056} = 84 \text{ см}^2$$

Так як найменша висота лежить навпроти найбільшої сторони, то:

$$h_{\text{найменша}} = \frac{2S}{\text{найбільша сторона}} = \frac{2 \cdot 84}{15} = \frac{168}{15} = 11,2 \text{ см}$$

2) 17 см, 25 см, 26 см

$$p = \frac{17 + 25 + 26}{2} = 34 \text{ см}$$

$$S = \sqrt{34(34 - 17)(34 - 25)(34 - 26)} = \sqrt{34 \cdot 17 \cdot 9 \cdot 8} = \sqrt{41616} = 204 \text{ см}^2$$

Так як найбільша висота лежить навпроти найменшої сторони, то:

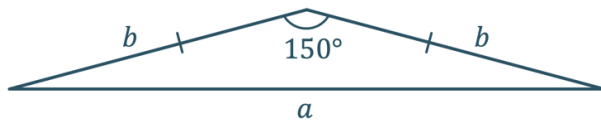
$$h_{\text{найбільша}} = \frac{2S}{\text{найменша сторона}} = \frac{2 \cdot 204}{17} = \frac{408}{17} = 24 \text{ см}$$

Відповідь: 1) 84 см^2 , $h_{\text{найменша}} = 11,2 \text{ см}$; 2) 204 см^2 , $h_{\text{найбільша}} = 24 \text{ см}$

№5

Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 150° , а його площа – 16 см^2 . Знайдіть сторони трикутника.

Розв'язання:



Так як трикутник рівнобедрений, то його бічні сторони є рівними.

Нехай:

a – основа трикутника;

b – бічна сторона;

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot b \cdot \sin 150^\circ = \frac{1}{2} b^2 \sin 30^\circ = \frac{b^2}{4}$$

$$b^2 = 4S$$

$$b = \sqrt{4S} = \sqrt{4 \cdot 16} = \sqrt{64} = 8 \text{ см}$$

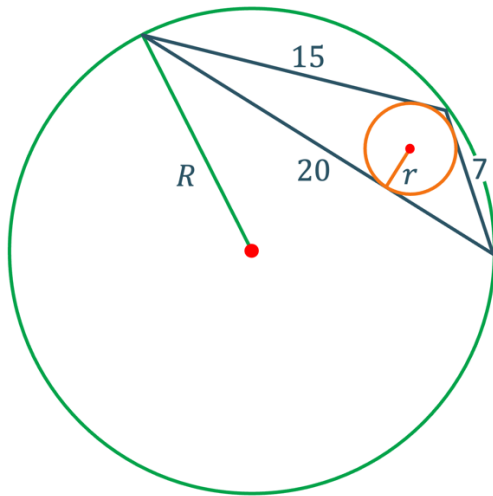
За теоремою косинусів:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cdot \cos 150^\circ} = \sqrt{2a^2 - 2a^2 \cos 150^\circ} = \sqrt{2a^2 + 2a^2 \cos 30^\circ} \\ &= \sqrt{2 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{8^2(2 + \sqrt{3})} = 8\sqrt{2 + \sqrt{3}} \text{ см} \end{aligned}$$

Відповідь: 8 см, 8 см, $8\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ см

Знайдіть радіуси вписаного й описаного кіл трикутника зі сторонами 7 см, 15 см і 20 см

Розв'язання:



Радіуси вписаних і описаних кіл можна виразити з формул площі трикутника за радіусами вписаних і описаних кіл:

$$S = \frac{abc}{4R} \rightarrow R = \frac{abc}{4S}$$

$$S = rp \rightarrow r = \frac{S}{p}$$

Площу даного трикутника знайдемо за теоремою Герона:

$$p = \frac{7 + 15 + 20}{2} = \frac{42}{2} = 21 \text{ см}$$

$$S = \sqrt{21(21 - 7)(21 - 15)(21 - 20)} = \sqrt{21 \cdot 14 \cdot 6 \cdot 1} = \sqrt{1764} = 42 \text{ см}^2$$

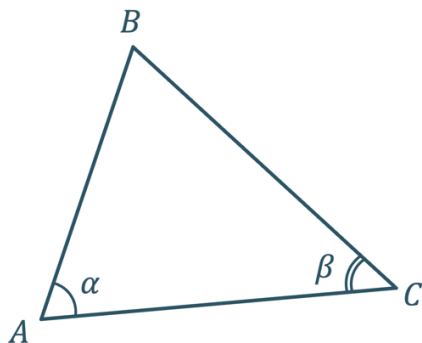
$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{7 \cdot 15 \cdot 20}{4 \cdot 42} = \frac{2100}{168} = 12,5 \text{ см}$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{42}{21} = 2 \text{ см}$$

Відповідь: $R = 12,5 \text{ см}$; $r = 2 \text{ см}$

Радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює R , а два його кути - α і β . Знайдіть площу трикутника.

Розв'язання:



З $\triangle ABC$ за теоремою про суму кутів трикутника:

$$\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C) = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

За узагальненою теоремою синусів:

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin \beta} = \frac{AC}{\sin(180^\circ - (\alpha + \beta))} = 2R$$

$$\sin(180^\circ - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta)$$

$$\frac{BC}{2\sin \alpha} = \frac{AB}{2\sin \beta} = \frac{AC}{2\sin(\alpha + \beta)} = R$$

$$BC = 2R \sin \alpha$$

$$AB = 2R \sin \beta$$

$$AC = 2R \sin(\alpha + \beta)$$

Знайдемо площу даного трикутника за радіусом описаного кола:

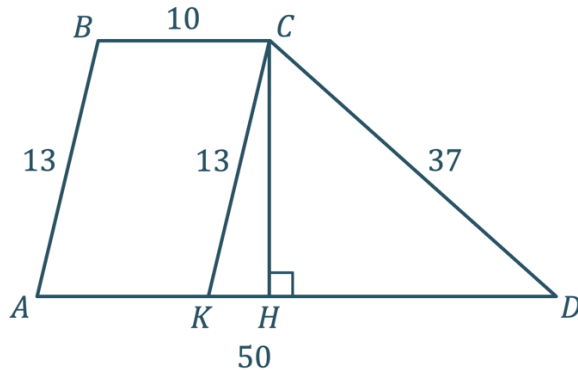
$$S = \frac{abc}{4R} = \frac{BC \cdot AB \cdot AC}{4R} = \frac{2R \sin \alpha \cdot 2R \sin \beta \cdot 2R \sin(\alpha + \beta)}{4R} = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta)$$

Відповідь: $2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta)$

№8

Паралельні сторони трапеції дорівнюють 10 см і 50 см, а непаралельні – 13 см і 37 см. Знайдіть площу трапеції.

Розв'язання:



Дано:

$ABCD$ – трапеція
 $BC \parallel AD$
 $BC = 10$ см
 $AD = 50$ см
 $AB = 13$ см
 $CD = 37$ см

Знайти:

S_{ABCD} – ?

Розв'язання:

Побудуємо:

$CK \parallel AB$

$CH \perp KD$

Тоді:

$CK = BA = 13$ см

CH – висота $\triangle KCD$ і трапеції $ABCD$

Знайдемо сторону KD трикутника KCD :

$KD = AD - BC = 50 - 10 = 40$ см

Виразимо висоту $\triangle KCD$ і трапеції $ABCD$ через площу $\triangle KCD$:

$$S_{\triangle KCD} = \frac{1}{2} KD \cdot CH$$

$$CH = \frac{S_{\triangle KCD} \cdot 2}{KD}$$

Знайдемо площу $\triangle KCD$ за теоремою Герона:

$$p = \frac{40 + 13 + 37}{2} = 45 \text{ см}$$

$$S_{KCD} = \sqrt{45(45 - 40)(45 - 13)(45 - 37)} = \sqrt{45 \cdot 5 \cdot 32 \cdot 8} = \sqrt{57600} = 240 \text{ см}^2$$

$$CH = \frac{S_{\triangle KCD} \cdot 2}{KD} = \frac{240 \cdot 2}{40} = 12 \text{ см}$$

З курсу геометрії 8 класу нам відомо, що площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ на висоту:

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CH = \frac{50 + 10}{2} \cdot 12 = 360 \text{ см}^2$$

Відповідь: 360 см^2

IV. Підсумок уроку

- Як знайти площу трикутника, якщо відомі дві сторони і кут між ними?
- Як знайти площу трикутника, якщо відомі три його сторони?
- Як знайти висоту трикутника, якщо відомі три його сторони?
- Як знайти площу трикутника за радіусом описаного кола?
- Як знайти площу трикутника за радіусом вписаного кола?
- Як знайти радіус вписаного і описаного кіл трикутника?

V. Домашнє завдання

Опрацювати §14

Виконати № 612, 617, 621, 629, 633, 638