Тема: Розв'язування трикутників. Прикладні задачі.

Мета:

- *Навчальна:* закріпити знання, отримані на попередніх уроках;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння аналізувати отримані знання та навички, правильно користуватися креслярським приладдям;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук;

Компетенції:

- математичні
- комунікативні

Тип уроку: закріплення знань;

Обладнання: конспект, презентація, мультимедійне обладнання;

Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

II. Актуалізація опорних знань

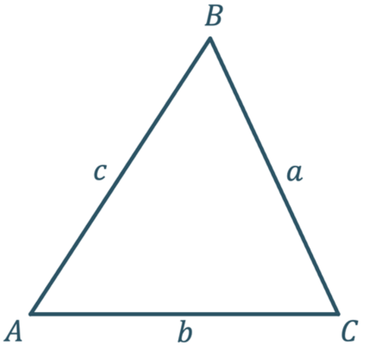
// Розв'язування трикутників

- Як на вашу думку, що означає розв'язати трикутник?

Розв'язати трикутник – *означає знайти його невідомі сторони і кути за відомими сторонами і кутами.*

- Які ви вже знаєте корисні співвідношення для розв'язування довільного трикутника?

(учні висловлюють власну думку)



- Чому дорівнює сума градусних мір кутів A, B і C?

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180° \left(\begin{array}{c}\textit{Теорема про} \\ \textit{суму кутів} \\ \textit{трикутника}\end{array}\right)$$

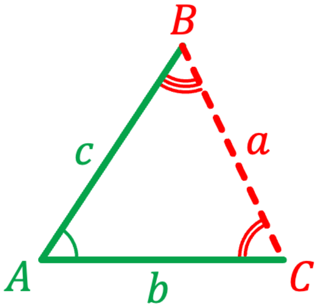
- Поясніть, що необхідно знати, щоб за теоремою косинусів знайти сторону BC?

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{array}\right| \ (\textit{Теорема косинусів})$$

- Сформулюйте теорему синусів для трикутника ABC

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \ (\textit{Теорема синусів})$$

1. За двома сторонами і кутом між ними



Дано:

$c, b, \angle A$

Знайти:

$a, \angle B, \angle C$

Розв'язання:

- Поясніть, як за допомогою теореми косинусів знайти сторону a?

1. $a = \sqrt{c^2 + b^2 - 2cb\cos A}$

- Поясніть, як за допомогою наслідку з теореми косинусів знайти $\angle B$?

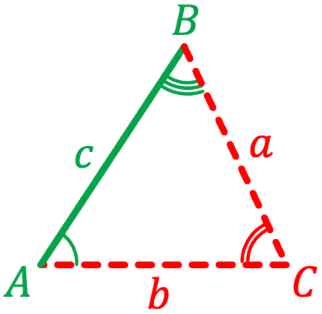
2. $\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$

**Далі знаходимо ∠B за допомогою таблиць або калькулятора*

- Поясніть, як за допомогою теореми про суму кутів трикутника знайти $\angle C$?

3. $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$

2. За стороною і двома кутами



Дано:

$c, \angle A, \angle B$

Знайти:

$a, b, \angle C$

Розв'язання:

- Поясніть, як за допомогою теореми про суму кутів трикутника знайти $\angle C$?

1. $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$

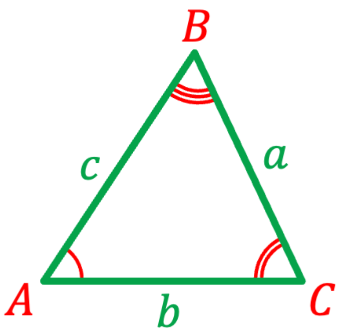
- Поясніть, як за допомогою теореми синусів знайти сторону b?

2. $\dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{b}{\sin B} \to b = \dfrac{c \sin B}{\sin C}$

- Поясніть, як за допомогою теореми синусів знайти сторону a?

3. $\dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{a}{\sin A} \to a = \dfrac{c \sin A}{\sin C}$

3. За трьома сторонами



Дано:
a, b, c

Знайти:
$\angle A, \angle B, \angle C$

Розв'язання:

- Поясніть, як за допомогою наслідку з теореми косинусів знайти кути A і B?

1. $\cos A = \dfrac{c^2 + b^2 - a^2}{2cb}$
2. $\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$

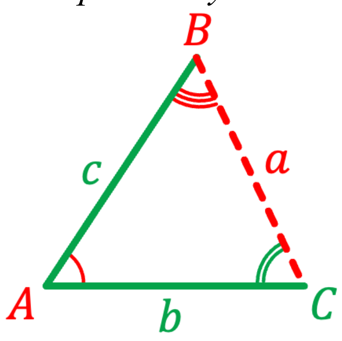
   **Далі знаходимо кути A і B за допомогою таблиць або калькулятора*

- Поясніть, як за допомогою теореми про суму кутів трикутника знайти $\angle C$?

3. $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$

4. За двома сторонами і кутом, протилежним до однієї з них

**Ця задача має II варіанти розв'язання, а також може мати 2, 1 або не мати розв'язку.*



І спосіб (за теоремою синусів)

Дано:
$c, b, \angle C$

Знайти:
$a, \angle A, \angle B$

Розв'язання:

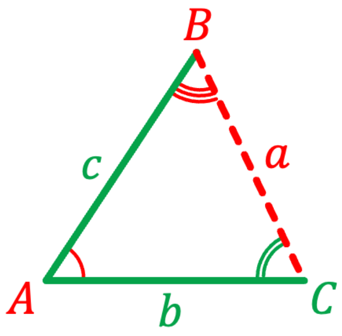
1. $\dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{b}{\sin B}$; $\quad \sin B = \dfrac{b \sin C}{c}$

   В залежності від значення синуса кута B задача може мати 2, 1 або не мати розв'язку. Так як за теоремою про суму кутів трикутника $\angle A = 180° - (\angle B + \angle C)$, то* ***має виконуватися умова* $\boldsymbol{\angle B + \angle C < 180°}$ **і** одночасно значення синуса кута B має задовольняти рівність $\boldsymbol{\sin B = \dfrac{b \sin C}{c}}$

2. $\angle A = 180° - (\angle B + \angle C)$

   **Далі знаходимо $\angle B$ за допомогою таблиць або калькулятора*

3. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$; $\quad a = \dfrac{c \sin A}{\sin C}$



II спосіб (за теоремою косинусів)

Дано:
c, b, $\angle C$

Знайти:
a, $\angle A$, $\angle B$

Розв'язання:

1. $$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos C$$
$$a^2 = \sqrt{c^2 - b^2 + 2ba\cos C}$$

В залежності від значення а задача може мати 2, 1 або не мати розв'язку. Значення а може бути від'ємним, але* ***сторона трикутника – це не від'ємна величина, також сторона трикутника не може дорівнювати нулю.*

2. $$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$
**Далі знаходимо $\angle B$ за допомогою таблиць або калькулятора*

3. $$\angle A = 180° - (\angle B + \angle C)$$

III. Розв'язування завдань

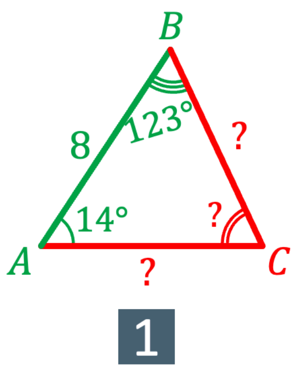
Невідомі сторони знаходити будемо з точністю до сотих сантиметра, кути в разі використання калькулятора – з точністю до мінути або з точністю до градуса у разі використання таблиць

№1

Розв'яжіть ΔABC за стороною і двома кутами:

1) $AB = 8$ см, $\angle A = 14°$, $\angle B = 123°$
2) $AB = 6$ см, $\angle A = 17°$, $\angle C = 76°$
3) $BC = 10$ см, $\angle B = 92°$, $\angle C = 54°$
4) $AC = 7$ см, $\angle C = 44°$, $\angle A = 28°$

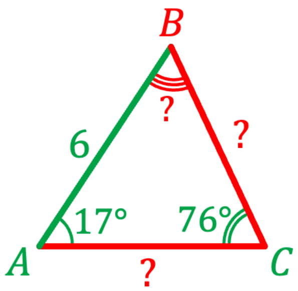
Розв'язання:



За теоремою про суму кутів трикутника:
$$\angle C = 180° - (\angle A + \angle B) = 180° - 137° = 43°$$

За теоремою синусів:
$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \rightarrow AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{8 \cdot 0{,}8387}{0{,}6810} \approx 9{,}85 \text{ см}$$
$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \rightarrow BC = \frac{AB \cdot \sin A}{\sin C} = \frac{8 \cdot 0{,}2419}{0{,}6810} \approx 2{,}84 \text{ см}$$

Відповідь: $\angle C = 43°$, $AC \approx 9{,}85$ см, $BC \approx 2{,}84$ см



2

За теоремою про суму кутів трикутника:

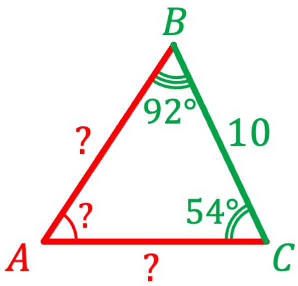
$$\angle B = 180° - (\angle A + \angle C) = 180° - 93° = 87°$$

За теоремою синусів:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \to AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{6 \cdot 0{,}9986}{0{,}9703} \approx 6{,}17 \text{ см}$$

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \to BC = \frac{AB \cdot \sin A}{\sin C} = \frac{6 \cdot 0{,}2924}{0{,}9703} \approx 1{,}8 \text{ см}$$

Відповідь: $\angle B = 87°$, $AC \approx 6{,}17$ см, $BC \approx 1{,}8$ см



3

За теоремою про суму кутів трикутника:

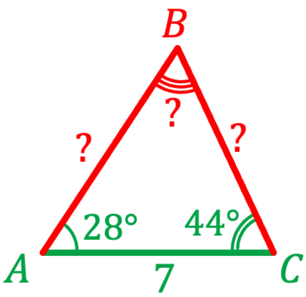
$$\angle A = 180° - (\angle B + \angle C) = 180° - 146° = 34°$$

За теоремою синусів:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \to AB = \frac{BC \cdot \sin C}{\sin A} = \frac{10 \cdot 0{,}8090}{0{,}5592} \approx 14{,}47 \text{ см}$$

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} \to AC = \frac{BC \cdot \sin B}{\sin A} = \frac{10 \cdot 0{,}9994}{0{,}5592} \approx 17{,}87 \text{ см}$$

Відповідь: $\angle A = 34°$, $AB \approx 14{,}47$ см, $AC \approx 17{,}87$ см



4

За теоремою про суму кутів трикутника:

$$\angle B = 180° - (\angle A + \angle C) = 180° - 72° = 108°$$

За теоремою синусів:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \to AB = \frac{AC \cdot \sin C}{\sin B} = \frac{7 \cdot 0{,}6946}{0{,}9511} \approx 5{,}12 \text{ см}$$

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} \to BC = \frac{AC \cdot \sin A}{\sin B} = \frac{7 \cdot 0{,}4695}{0{,}9511} \approx 3{,}46 \text{ см}$$

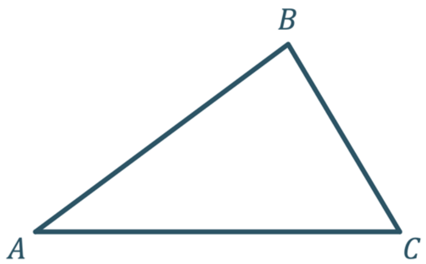
Відповідь: $\angle B = 108°$, $AB \approx 5{,}12$ см, $BC \approx 3{,}46$ см

№2

Розв'яжіть ΔABC за трьома сторонами:

1) $AB = 5$ см, $AC = 4$ см, $BC = 8$ см
2) $AB = 9$ см, $AC = 7$ см, $BC = 13$ см

Розв'язання:



За наслідком з теореми косинусів:

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{5^2 + 4^2 - 8^2}{2 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{25 + 16 - 64}{40} = -\frac{23}{40} = -0{,}575$$

$\angle A \approx 125°5'$

$$\cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot AC \cdot BC} = \frac{4^2 + 8^2 - 5^2}{2 \cdot 4 \cdot 8} = \frac{16 + 64 - 25}{64} = \frac{55}{64} \approx 0{,}8593$$

$\angle C \approx 30°45'$

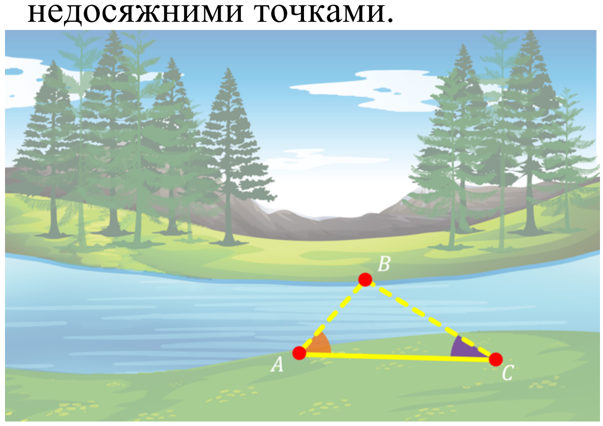
За теоремою про суму кутів трикутника:

$$\angle B = 180° - (\angle A + \angle C) = 180° - 155°50' \approx 24°10'$$

Відповідь: $\angle A \approx 125°5'$; $\angle B \approx 24°10'$; $\angle C \approx 30°45'$

№3

1) Вам потрібно побудувати міст через річку. Щоб зробити попередній розрахунок довжини мосту і його вартості, необхідно знати його довжину. Складіть алгоритм знаходження дожини мосту, якщо ви знаходитеся біля точки початку мосту A і у вас є рулетка та прилад для вимірювання кутів між двома недосяжними точками.



2) Виразіть довжину мосту AB через AC, $\angle A$ і $\angle C$
3) Знайдіть довжину мосту AB, якщо $AC = 28$ м, $\angle A = 38°$ і $\angle C = 75°$. Відповідь округліть до 1 м

Розв'язання:

1) Потрібно обрати ще одну досяжну точку C так, щоб утворився ΔABC, потім рулеткою вимірюємо відстань від точки A до точки C, а приладом для вимірювання кутів вимірюємо кути A і C.

2) За теоремою про суму кутів трикутника:
$\angle B = 180° - (\angle A + \angle C)$

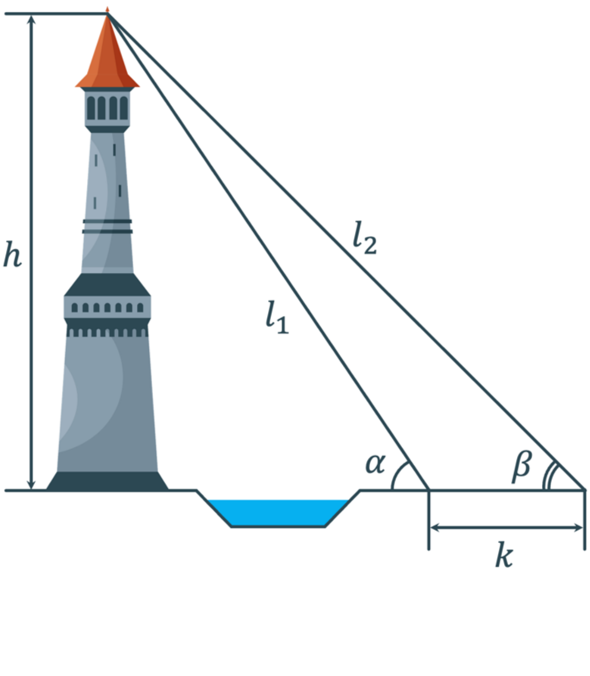
Так як $\sin (180° - \alpha) = \sin \alpha$, то:
$$\sin \left(180° - (\angle A + \angle C)\right) = \sin (\angle A + \angle C)$$
Отже $\sin B = \sin (\angle A + \angle C)$

За теоремою синусів:
$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin (\angle A + \angle C)} \to \boldsymbol{AB} = \frac{\boldsymbol{AC \cdot \sin C}}{\boldsymbol{\sin (\angle A + \angle C)}}$$

3)
$$AB = \frac{AC \cdot \sin C}{\sin (\angle A + \angle C)} \approx \frac{28 \cdot 0{,}9659}{0{,}9205} \approx 29{,}38 \text{ м}$$
$AB \approx 29$ м

Якщо округлити довжину мосту до 1 м, то отримаємо ≈ 29 м, тобто менше від дійсної довжини – це ще одна причина того, що кінцева вартість будівництва зазвичай вища від попереденіх підрахунків.

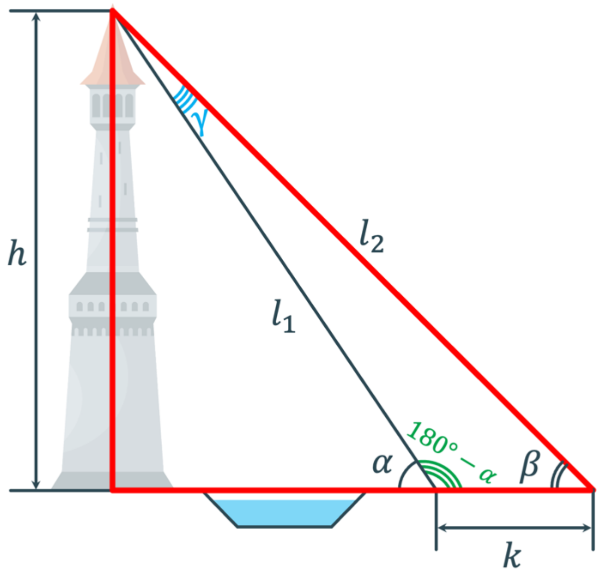
№4



1) Вам потрібно знайти висоту вежі h і довжину тросів l_1 і l_2, що направлені від вершини вежі до землі. Відстань до вежі виміряти не можливо, так як вежу оточує оборонний рів з водою, але ви можете виміряти відстань k, кути α і β. Поясніть, як це зробити?

2) Знайдіть висоту вежі і довжини тросів, якщо $k = 3$ м, $\angle\alpha = 74°$, $\angle\beta = 68°$. Відповідь округліть до 1 м

Розв'язання:



1) Знаючи кут α, можемо знайти суміжний з ним кут, а потім за теоремою про суму кутів трикутника знайдемо кут γ. Довжини тросів l_1 і l_2 можемо знайти за теоремою синусів. Висоту h легко знайти за означенням синуса, так як нам відома гіпотенуза l_2 і кут β

2)

Знайдемо кут, суміжни з кутом α:

$$180° - \alpha = 180° - 74° = 106°$$

За теоремою про суму кутів трикутника:

$$\gamma = 180° - (106° + 68°) = 6°$$

За теоремою синусів:

$$\frac{k}{\sin 6°} = \frac{l_2}{\sin 106°} \to l_2 = \frac{k \cdot \sin 106°}{\sin 6°} \approx \frac{3 \cdot 0{,}9613}{0{,}1045} \approx 27{,}59$$

$$\frac{k}{\sin 6°} = \frac{l_1}{\sin 68°} \to l_1 = \frac{k \cdot \sin 68°}{\sin 6°} \approx \frac{3 \cdot 0{,}9272}{0{,}1045} \approx 26{,}61$$

Якщо округлити довжину тросів до 1 м, то отримаємо, що:

$l_1 \approx 27$ м

$l_2 \approx 28$ м

За означенням синуса гострого кута прямокутного трикутника:

$$\sin\beta = \frac{h}{l_2}$$

$$h = \sin\beta \cdot l_2 = \sin 68° \cdot 26{,}61 \approx 0{,}9272 \cdot 26{,}61 \approx 24{,}67$$

Якщо округлити висоту h до 1 м, то отримаємо, що $h \approx 25$ м

Відповідь: $l_1 \approx 27$ м, $l_2 \approx 28$ м, $h \approx 25$ м

IV. Підсумок уроку

- Які співвідношення ми використовуємо, щоб розв'язати трикутник?
- За якою теоремою ми можемо розв'язати трикутник, якщо в ньому відомо:
  А) Три сторони і кут між ними
  Б) Дві сторони і кут, протилежний одній з них
  С) Сторона і прилеглі до неї кути

- Чи за будь-якими відомими трьома елементами трикутника, можна знайти його інші елементи? *(Трикутник не можливо розв'язати, якщо відомо тільки три його кути і не відома жодна сторона)*

V. Домашнє завдання

Опрацювати §13

Виконати № 584, 586, 590, 593