Тема: Теорема синусів
Мета:

- *Навчальна:* засвоїти та довести теорему синусів;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння стисло та доречно висловлювати свої міркування та обґрунтовувати їхню правильність;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук;

Компетенції:

- математичні
- комунікативні

Тип уроку: засвоєння нових знань;
Обладнання: конспект, презентація, мультимедійне обладнання;

Хід уроку

I. Організаційний етап

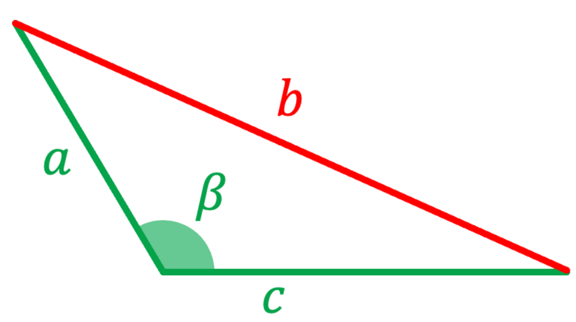
- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

II. Вивчення нового матеріалу

// Розв'язування трикутників

ДОВІЛЬНІ ТРИКУТНИКИ

УМІЄМО



Знаходити сторону за двома відомими сторонами і кутом між ними будь-якого трикутника

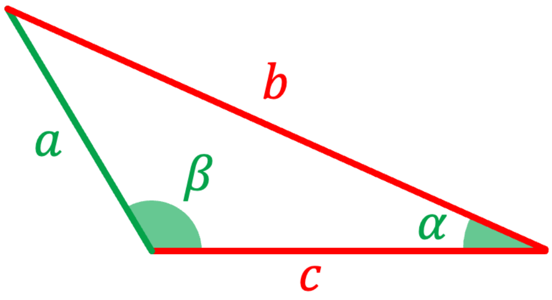
- ➢ Поясніть, як знайти сторону b, якщо відомі сторони a і c та кут β?
  (За теоремою косинусів $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta}$*)*

Знаходити кут трикутника за трьома відомими сторонами

- ➢ Поясніть, як знайти кут β, якщо відомі сторони a, b і c?
  (Знаходити невідомі кути в довільному трикутнику можна за допомогою наслідка з теореми косинусів, наприклад:
  $\cos\beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$*)*

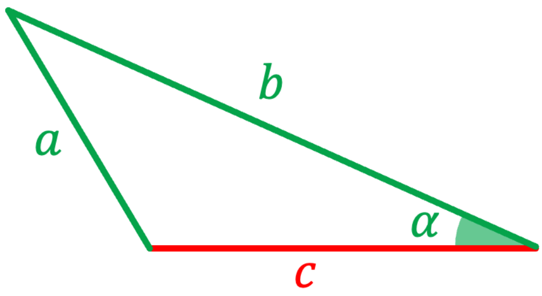
ДОВІЛЬНІ ТРИКУТНИКИ

НАВЧИМОСЯ



Розв'язувати трикутники за двома відомими кутами і стороною, що лежить проти одного з них

Розв'язувати трикутники за двома відомими сторонами і кутом, що лежить проти однієї з них

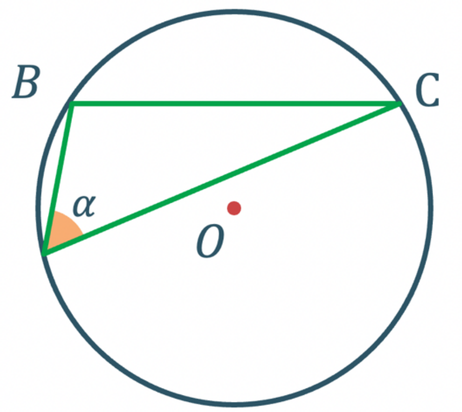


// Лема

Лема – це доведене твердження, корисне не саме по собі, а для доведення інших тверджень.

Лема

Хорда кола дорівнює добутку двох радіусів цього кола та синуса будь-якого вписаного кута, який спирається на цю хорду.



- Сформулюйте дану лему для хорди BC

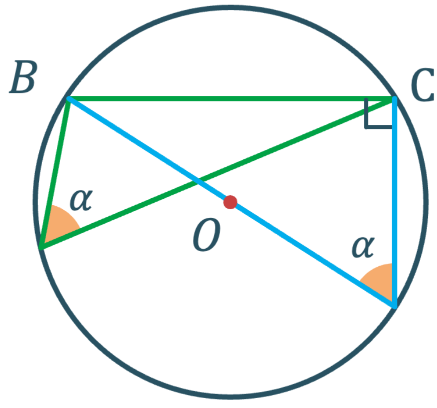
  $\boldsymbol{BC = 2R \cdot \sin\alpha}$

- Чи будуть у вас ідеї для доведення цієї леми?

  (Учні висловлюють власні ідеї для доведення леми)

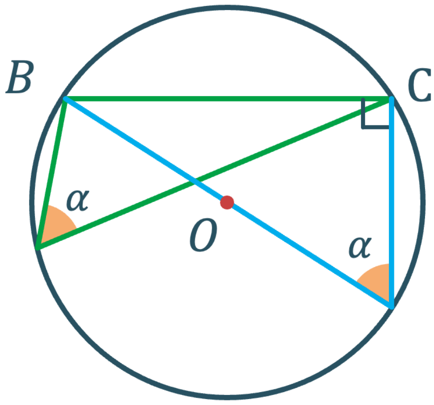
- Поясніть, чому кути «α» рівні в даному випадку?

  (Дані кути рівні між собою як вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу)



Доведення:

1) **Розглянемо випадки, коли вершини кутів належать більшій дузі кола**



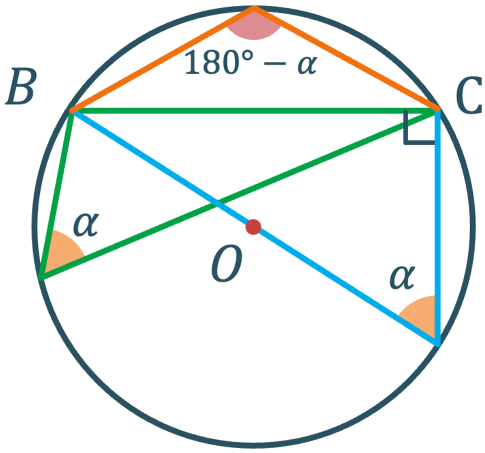
➢ Виразіть сторону BC за допомогою $\sin\alpha$

$$\sin\alpha = \frac{BC}{2R} \rightarrow BC = 2R \cdot \sin\alpha$$

2) **Розглянемо випадки, коли вершини кутів належать меншій дузі кола**

➢ Якому відношенню завжди буде дорівнювати діаметр кола?

Так як $BC = 2R \cdot \sin\alpha$, то $\boldsymbol{2R = D = \frac{BC}{\sin\alpha}}$



➢ Що ми вже знаємо про синуси кутів, що доповнюють один одного до 180°?

$$\boldsymbol{\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)}$$

Так як всі кути, що спираються на хорду BC, дорівнюють або α або $180° - \alpha$, то їхні синуси рівні. ***Отже отримана рівність справедлива для всіх вписаних кутів, які спираються на хорду BC:***

$$\sin\alpha = \sin(180° - \alpha) \rightarrow \boldsymbol{\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{BC}{\sin(180° - \alpha)} = 2R}$$

Доведено

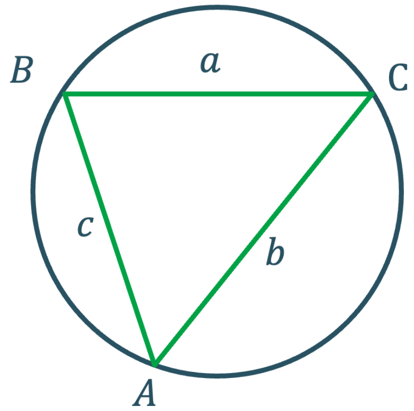
// Теорема синусів

Теорема синусів

Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних до них кутів

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Доведення:



За доведеною лемою:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a}{\sin A} = 2R \\ \dfrac{b}{\sin B} = 2R \\ \dfrac{c}{\sin C} = 2R \end{array}\right| \to \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Доведено

Наслідок ***(узагальнена теорема синусів)***

$$\boldsymbol{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R = D}$$

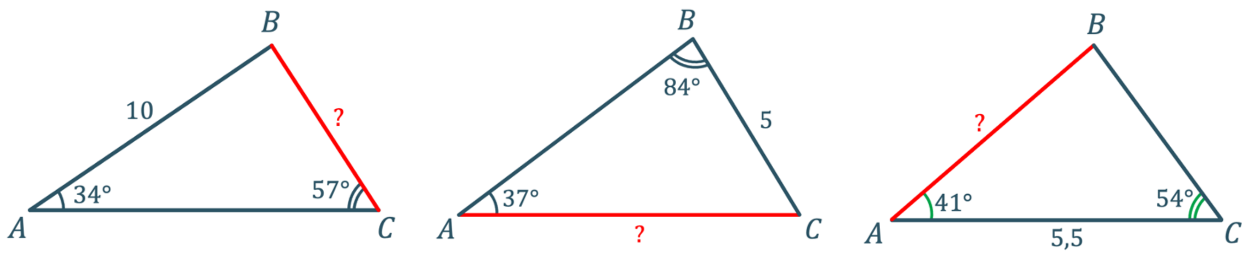
➢ Спробуйте сформулювати цей наслідок

У будь-якому трикутнику відношення сторони до синуса протилежного їй кута дорівнює діаметру кола, описаного навколо цього трикутника

III. Розв'язування завдань

№1

За даними на рисунках обчисліть довжину сторони трикутника, що позначена знаком запитання. Для розрахунків використовуйте калькулятор або таблиці Брадіса, результат округліть до 0,1



1 2 3

Розв'язання:

1) За теоремою синусів:

$$\frac{AB}{\sin 57°} = \frac{BC}{\sin 34°} \to BC = \frac{AB \cdot \sin 34°}{\sin 57°} \approx \frac{10 \cdot 0{,}56}{0{,}84} \approx 6.6$$

2) За теоремою синусів:

$$\frac{BC}{\sin 37°} = \frac{AC}{\sin 84°} \to AC = \frac{BC \cdot \sin 84°}{\sin 37°} \approx \frac{5 \cdot 0{,}99}{0{,}6} \approx 8{,}25$$

3) За теоремою про суму кутів трикутника:

$\angle B = 180° - (\angle A + \angle C) = 180° - 95° = 85°$

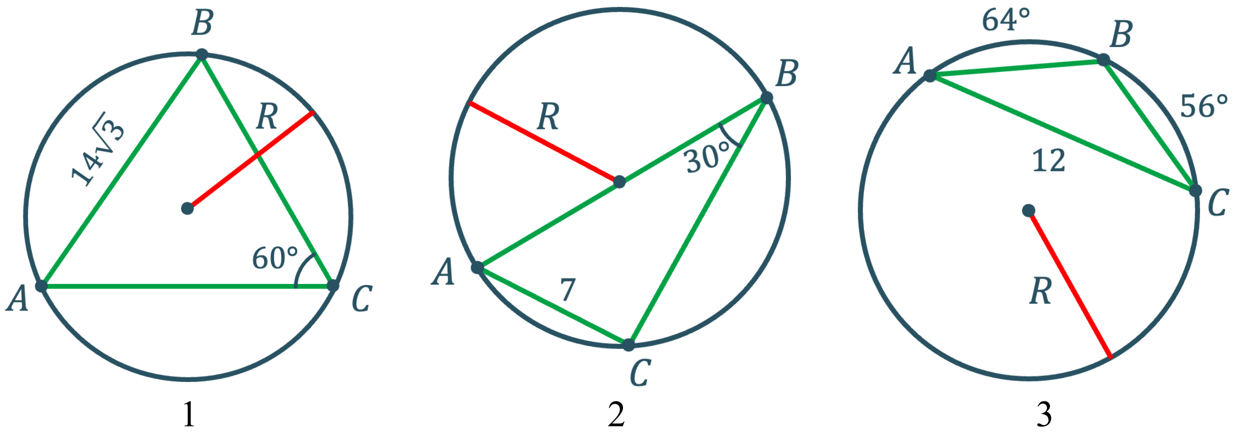
За теоремою синусів:

$$\frac{AC}{\sin 85°} = \frac{BA}{\sin 54°} \to BA = \frac{AC \cdot \sin 54°}{\sin 85°} \approx \frac{5{,}5 \cdot 0{,}8}{0{,}9} \approx 4{,}8$$

Відповідь: 1) 6.6; 2) 8,25; 3) 4,8

№2

За даними на рисунках, знайдіть радіус R кола, описаного навколо трикутника ABC



Розв'язання:

1) За узагальненою теоремою синусів:

$$2R = \frac{AB}{\sin 60°}$$

$$R = \frac{AB}{\sin 60°} : 2 = \frac{AB}{\sin 60°} \cdot \frac{1}{2} = \frac{AB}{2\sin 60°} = \frac{14\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{14\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 14$$

2) За узагальненою теоремою синусів:

$$R = \frac{AC}{2\sin 30°} = \frac{7}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 7$$

3) Так як вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається, то:

$$\angle C = \frac{64°}{2} = 32°$$

$$\angle A = \frac{56°}{2} = 28°$$

За теоремою про суму кутів трикутника:

$$\angle B = 180° - (\angle A + \angle C) = 180° - 60° = 120°$$

За узагальненою теоремою синусів:

$$R = \frac{AC}{2\sin 120°} = \frac{12}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$$

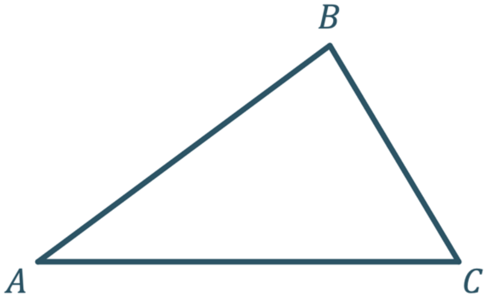
Відповідь: 1) 14; 2) 7; 3) $4\sqrt{3}$

№3

Виконайте схематичне зображення трикутника ABC. Знайдіть градусну міру кута B трикутника ABC (відповідь округліть до 1°), якщо:

1) $AC = 4$ см, $BC = 8$ см, $\angle A = 58°$
2) $AB = 3{,}8$ см, $AC = 3{,}5$ см, $\angle C = 34°$

Розв'язання:



1) $AC = 4$ см, $BC = 8$ см, $\angle A = 58°$

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$$

$$\sin B = \frac{\sin A \cdot AC}{BC} \approx \frac{0{,}85 \cdot 4}{8} \approx 0{,}425$$

$$\angle B \approx 26°$$

2) $AB = 3{,}8$ см, $AC = 3{,}5$ см, $\angle C = 34°$

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$$

$$\sin B = \frac{\sin C \cdot AC}{AB} \approx \frac{0{,}6 \cdot 3{,}5}{3.8} \approx 0{,}6$$

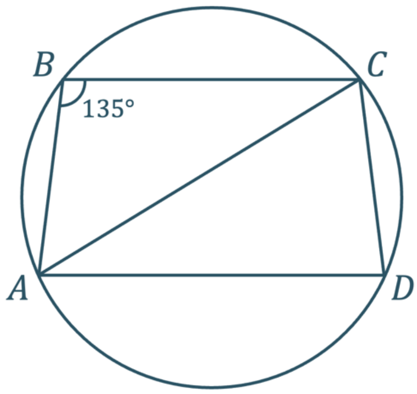
$$\angle B \approx 37°$$

Відповідь: 1) $\approx 26°$; 2) $\approx 37°$

№4

Радіус описаного навколо рівнобічної трапеції кола дорівнює $7\sqrt{2}$ см. Знайдіть довжину діагоналі трапеції, якщо один з її кутів дорівнює $135°$

Розв'язання:



За узагальненою теоремою синусів:

$$\frac{AC}{\sin B} = 2R$$

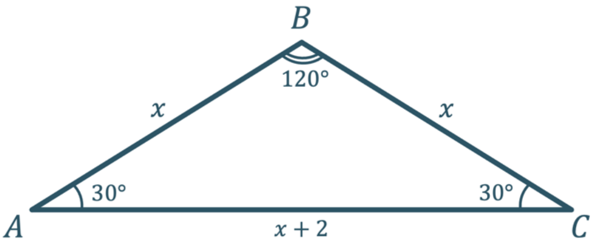
$$AC = 2R \cdot \sin B = 2 \cdot 7\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 14 \text{ см}$$

Відповідь: 14 см

№5

Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює $30°$. Знайдіть периметр цього трикутника, якщо його основа більша за бічну сторону на 2 см

Розв'язання:



ΔABC – рівнобедрений, отже:

$AB = BC = x$

$\angle A = \angle C = 30°$

Нехай:

$AB = BC = x$

Тоді:

$AC = x + 2$

За теоремою про суму кутів трикутника:

$\angle B = 180° - (\angle A + \angle C) = 180° - 60° = 120°$

За теоремою синусів:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$$

$$\frac{x}{\sin 30°} = \frac{x+2}{\sin 120°}$$

$$x \cdot \sin 120° = (x+2) \cdot \sin 30°$$

$$x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = (x+2) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x+2}{2} \ \Big|\cdot 2$$

$$x\sqrt{3} = x + 2$$

$$x\sqrt{3} - x = 2$$

$$x\left(\sqrt{3} - 1\right) = 2$$

$$x = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \ \Big|\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)$$

$$x = \frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)} = \frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{3-1} = \frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{2} = \sqrt{3}+1$$

$AB = BC = x = \sqrt{3} + 1$

$AC = x + 2 = \sqrt{3} + 1 + 2 = \sqrt{3} + 3$

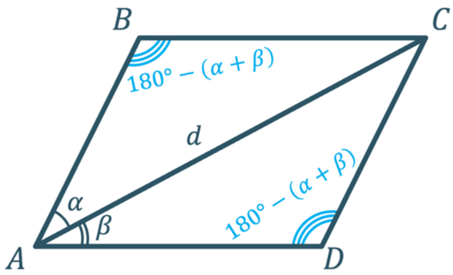
$P_{ABC} = AB + BC + AC = \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} + 3 = \sqrt{3} + 5$ *(см)*

Відповідь: $\sqrt{3} + 5$ *(см)*

№6

Знайдіть периметр паралелограма, якщо одна з його діагоналей дорівнює d і ділить його кут на частини, міри яких дорівнюють α і β.

Розв'язання:



➢ Як можемо знайти $\angle B$?

Так як сума кутів, прилеглих до однієї сторони паралелограма дорівнює $180°$, то:
$\angle B = 180° - (\alpha + \beta)$

За теоремою синусів, з ΔABC:

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A}$$

$$\frac{d}{\sin\big(180° - (\alpha + \beta)\big)} = \frac{BC}{\sin \alpha}$$

$$BC = \frac{d \cdot \sin \alpha}{\sin\big(180° - (\alpha + \beta)\big)}$$

Так як $\sin\big(180° - (\alpha + \beta)\big) = \sin(\alpha + \beta)$, то:

$$BC = \frac{d \cdot \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

За теоремою синусів, з ΔADC:

$$\frac{AC}{\sin D} = \frac{DC}{\sin A}$$

$$\frac{d}{\sin\big(180° - (\alpha + \beta)\big)} = \frac{DC}{\sin \beta}$$

$$DC = \frac{d \cdot \sin \beta}{\sin\big(180° - (\alpha + \beta)\big)}$$

Так як $\sin\big(180° - (\alpha + \beta)\big) = \sin(\alpha + \beta)$, то:

$$DC = \frac{d \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$P_{ABCD} = 2(BC + DC) = 2\left(\frac{d \cdot \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} + \frac{d \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}\right) = 2\left(\frac{d \cdot \sin \alpha + d \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}\right)$$

$$= 2\left(\frac{d(\sin \alpha + \sin \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}\right) = \frac{2d(\sin \alpha + \sin \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Відповідь: $\dfrac{2d(\sin \alpha + \sin \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$

IV. Підсумок уроку

- Сформулюйте теорему синусів
- Дати відповідь на запитання учнів

V. Домашнє завдання

Опрацювати §12
Виконати № 546, 550, 554, 560, 569