

**Тема:** Теорема косинусів

**Мета:**

- *Навчальна:* засвоїти та довести теорему косинусів;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння стисло та доречно висловлювати свої міркування та обґрунтовувати їхню правильність;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук;

**Компетенції:**

- математичні
- комунікативні

**Тип уроку:** засвоєння нових знань;

**Обладнання:** конспект, презентація, мультимедійне обладнання;

### Хід уроку

#### I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

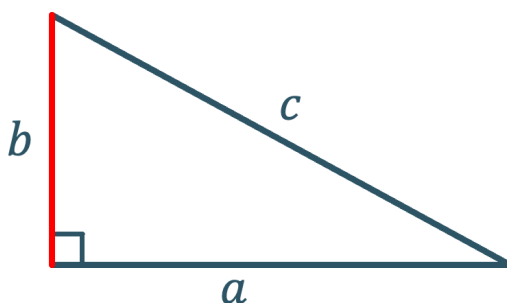
#### II. Вивчення нового матеріалу

// Розв'язування трикутників

### ПРЯМОКУТНІ ТРИКУТНИКИ

#### УМІЄМО

*Знаходити сторону за двома відомими сторонами*

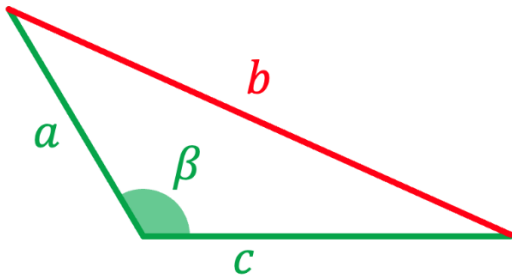


- Поясніть, як знайти сторону  $b$ , якщо відомі сторони  $a$  і  $c$ ?  
(За теоремою Піфагора  
 $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ )

*Знаходити інші сторони за відомим гострим кутом і стороною*

- Поясніть, як знайти сторону  $b$ , якщо відома сторона  $c$  і кут  $\beta$ ?  
(Знаходити невідомі сторони в прямокутному трикутнику за відомою стороною і кутом можна за допомогою синуса, косинуса або тангенса.  
Наприклад:  $b = \sin \beta \cdot c$ )

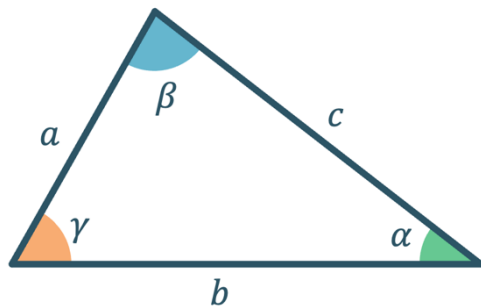
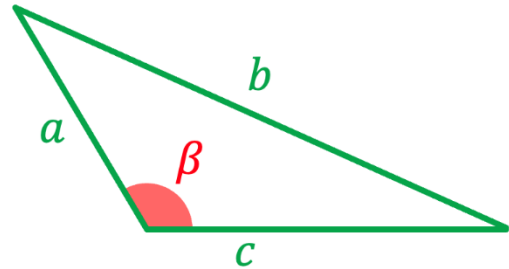
### ДОВІЛЬНІ ТРИКУТНИКИ



Знаходити кут трикутника за трьома відомими сторонами

## НАВЧИМОСЯ

Знаходити сторону за двома відомими сторонами і кутом між ними будь-якого трикутника



### Теорема косинусів

Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними.

// Теорема косинусів

- Сформулюйте теорему косинусів для сторони  $c$  даного трикутника
- Сформулюйте теорему косинусів для сторони  $a$  даного трикутника
- Сформулюйте теорему косинусів для сторони  $b$  даного трикутника



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

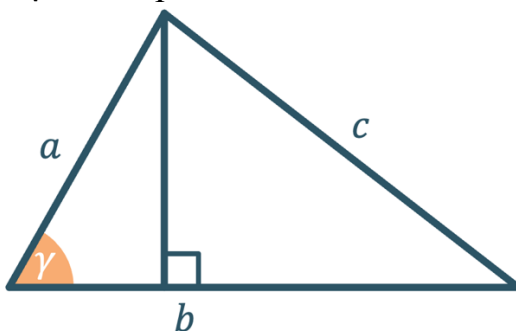
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

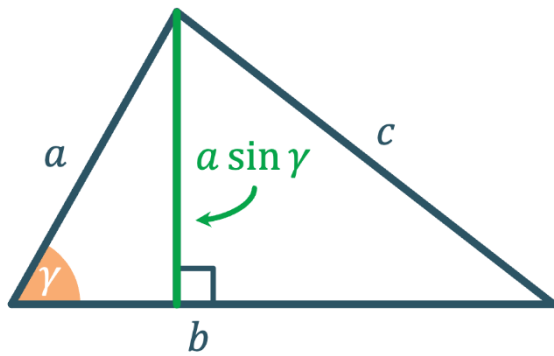
### Доведення:

Розглянемо три випадки (коли кут між сторонами гострий, тупий або прямий):

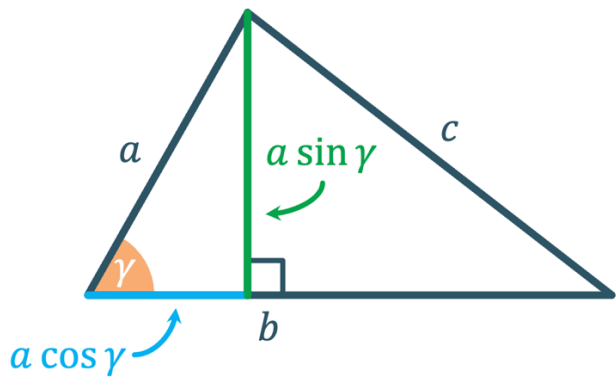
1)  $\angle \gamma$  – гострий



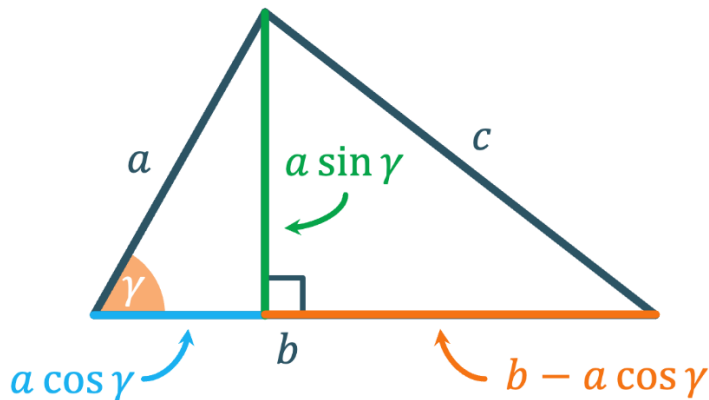
- Як за допомогою кута  $\gamma$  і сторони  $a$  можемо виразити довжину побудованого перпендикуляра? ( $a \sin \gamma$ )



- Як виразити проекцію сторони  $a$  на сторону  $b$  і косинус кута  $\gamma$ ?  
( $a \cos \gamma$ )



- Як виразити проекцію сторони  $c$  через сторону  $b$  і проекцію сторони  $a$  на сторону  $b$ ?  
( $b - a \cos \gamma$ )



- Як виразити сторону  $c$  за допомогою теореми Піфагора?

$$c^2 = (a \sin \gamma)^2 + (b - a \cos \gamma)^2 =$$

- Пригадайте формулу квадрата різниці двох чисел і розкрийте дужки

$$= a^2 \sin^2 \gamma + b^2 - 2ab \cos \gamma + a^2 \cos^2 \gamma =$$

- Що спільного можемо винести за дужки?

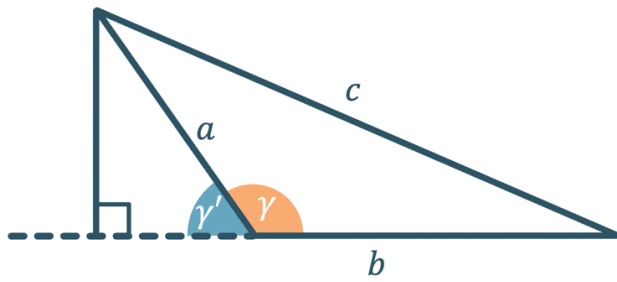
$$= a^2 (\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma) + b^2 - 2ab \cos \gamma =$$

- Пригадайте основну тригонометричну тотожність. Який можемо зробити висновок?

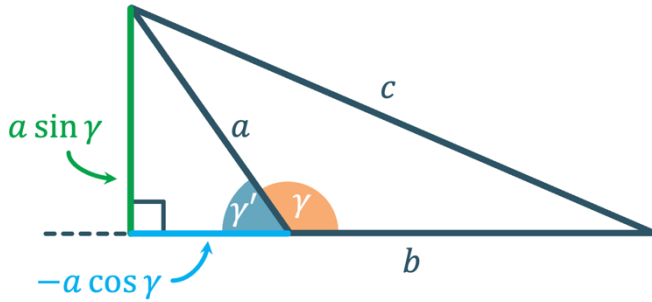
$$= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

*Доведено*

2)  $\angle \gamma$  – тупий



- Якщо кути  $\gamma$  і  $\gamma'$  в сумі дають  $180^\circ$ , що можемо сказати про їх синуси і косинуси (Синуси таких кутів однакові, а косинуси відрізняються знаком)



$$\begin{aligned}\gamma' &= 180^\circ - \gamma \\ a \sin(180^\circ - \gamma) &= a \sin \gamma \\ a \cos(180^\circ - \gamma) &= -a \cos \gamma\end{aligned}$$

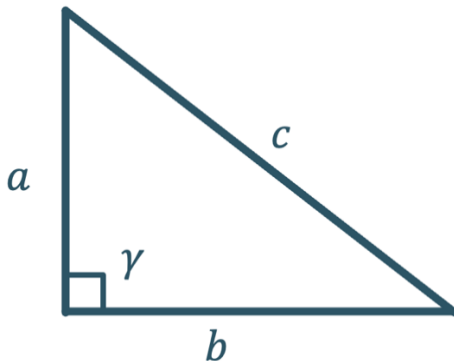
Так як від перестановки доданків сума не змінюється, то:  
 $-a \cos \gamma + b = b - a \cos \gamma$

$$c^2 = (a \sin \gamma)^2 + (b - a \cos \gamma)^2$$

Далі доведення аналогічне доведенню першого випадку, коли  $\angle \gamma$  – гострий

*Доведено*

3)  $\angle \gamma$  – прямий



- Доведіть самостійно випадок, коли  $\angle \gamma$  – прямий (Учні висловлюють власну думку)

Так як:

$$\cos 90^\circ = 0$$

То:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot 0 = a^2 + b^2$$

Отримали теорему Піфагора, тобто твердження справджується.

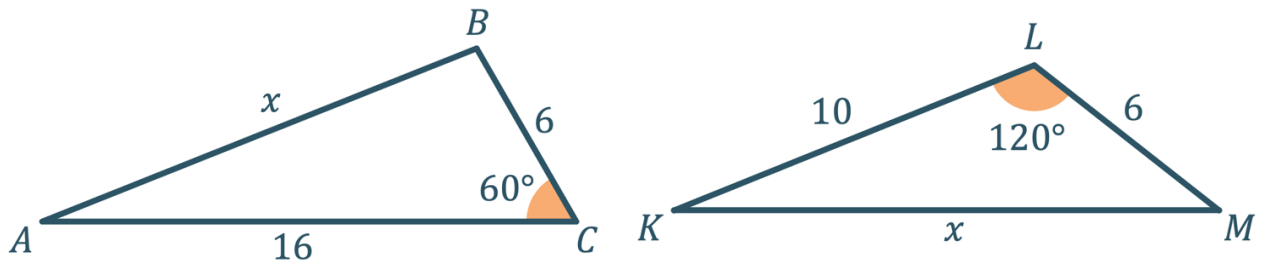
**Доведено**



*Теорема Піфагора є окремим випадком теореми косинусів, тому теорему косинусів іноді називають узагальненою теоремою Піфагора*

### III. Розв'язування завдань

№1



Запишіть теорему косинусів для:

- 1) Сторони  $AC$  трикутника  $ABC$
- 2) Сторони  $LM$  трикутника  $KLM$

Використовуючи теорему косинусів знайдіть сторону  $x$  трикутників  $ABC$  і  $KLM$

**Розв'язання:**

- 1)  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos ABC$   
 $LM^2 = KL^2 + KM^2 - 2KL \cdot KM \cdot \cos LKM$

2) з  $\triangle ABC$ :

$$x = \sqrt{16^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 16 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{256 + 36 - 96} = \sqrt{196} = 14$$

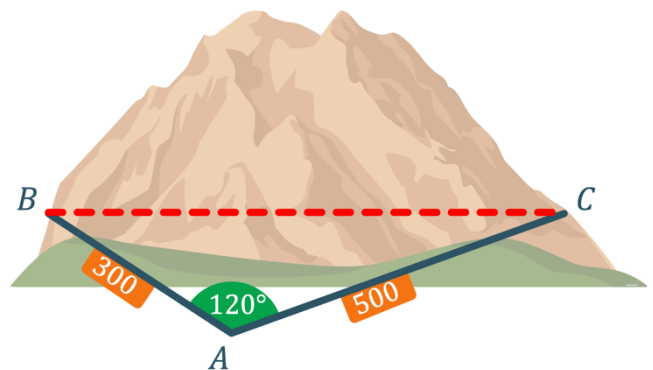
з  $\triangle KLM$ :

$$x = \sqrt{10^2 + 6^2 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{136 + 60} = \sqrt{196} = 14$$

**Відповідь:**  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos ABC$ ;  
 $LM^2 = KL^2 + KM^2 - 2KL \cdot KM \cdot \cos LKM$ ; 14; 14;

№2

Через гору потрібно побудувати тунель метро. Працівники виміряли відстані від доступної точки до початку і кінця тунелю та кут між ними. Отримані значення: 300 м і 500 м, градусна міра кута між цими відстанями дорівнює  $120^\circ$ . Обчисліть довжину тунелю, який необхідно побудувати.



**Розв'язання:**

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos BAC = 90000 + 250000 + 2 \cdot 300 \cdot 500 \cdot \frac{1}{2} \\ = 490000$$

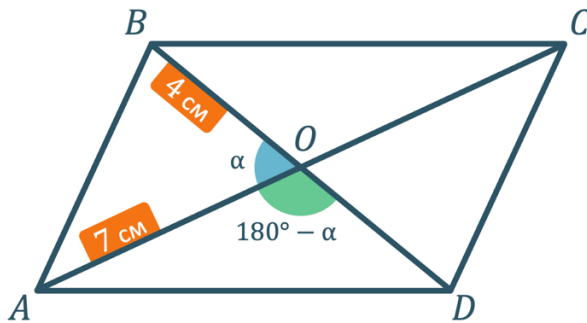
$$BC = 700 \text{ м}$$

**Відповідь:** 700 м

**№3**

Діагоналі паралелограма дорівнюють 8 см і 14 см, косинус гострого кута між ними дорівнює  $\frac{2}{7}$ . Знайдіть периметр паралелограма.

**Розв'язання:**



Так як діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл, то:

$$BO = OD = \frac{BD}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ см}$$

$$AO = OC = \frac{AC}{2} = \frac{14}{2} = 7 \text{ см}$$

➤ Що ми вже знаємо про косинуси кутів, сума яких дорівнює  $180^\circ$ ?

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\text{Так як } \cos BOA = \frac{2}{7}, \text{ то } \cos AOD = -\frac{2}{7}$$

За теоремою косинусів:

$$AB^2 = OB^2 + OA^2 - 2OB \cdot OA \cdot \cos BOA = 4^2 + 7^2 - 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \frac{2}{7} = 65 - 16 \\ = 49 \text{ см}$$

$$AB = 7 \text{ см}$$

$$AD^2 = OA^2 + OD^2 - 2OA \cdot OD \cdot \cos AOD = 7^2 + 4^2 - 2 \cdot 7 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) \\ = 65 + 16 = 81 \text{ см}$$

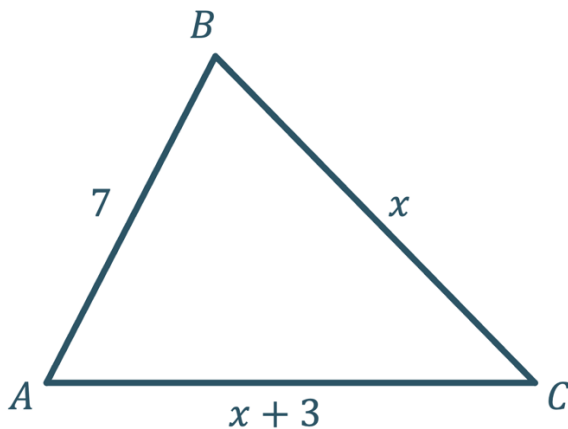
$$AD = 9 \text{ см}$$

$$P_{ABCD} = 2(AB + AD) = 2(7 + 9) = 32 \text{ см}$$

**Відповідь:** 32 см

Одна зі сторін трикутника дорівнює 7 см. Дві інші його сторони утворюють кут  $60^\circ$ , а їх різниця дорівнює 3 см. Знайдіть периметр трикутника.

**Розв'язання:**



Нехай:

$$AB = 7 \text{ см}$$

$$BC = x$$

Тоді:

$$CA = x + 3$$

За теоремою косинусів:

$$\begin{aligned} AB^2 &= CA^2 + CB^2 - 2CA \cdot CB \cdot \cos ACB \\ &= (x + 3)^2 + x^2 - 2 \cdot (x + 3) \cdot x \cdot \cos 60^\circ \\ &= x^2 + 6x + 9 + x^2 - \frac{2x(x + 3)}{2} = 2x^2 + 6x + 9 - x^2 - 3x \\ &= x^2 + 3x + 9 \end{aligned}$$

$$7^2 = x^2 + 3x + 9$$

$$49 = x^2 + 3x + 9$$

$$x^2 + 3x - 40 = 0$$

За теоремою Вієта:

$$x_1 = 5$$

$x_2 = -8$  (не задовольняє умову, так як сторона трикутника не може бути від'ємною)

$$BC = x = 5 \text{ см}$$

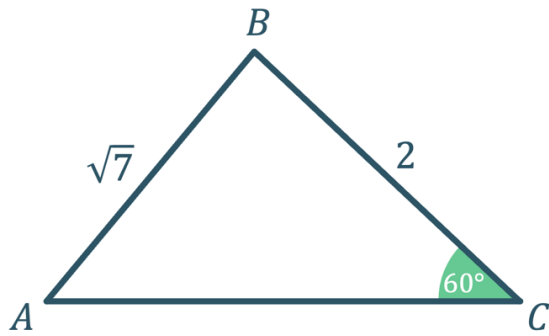
$$CA = x + 3 = 5 + 3 = 8 \text{ см}$$

$$P_{ABC} = AB + BC + AC = 7 + 5 + 8 = 20 \text{ см}$$

**Відповідь:** 20 см

У трикутнику  $ABC$  градусна міра кута  $C$  дорівнює  $60^\circ$ ,  $BC = 2$  см,  $BA = \sqrt{7}$  см. Знайдіть довжину сторони  $AC$ .

**Розв'язання:**



За теоремою косинусів:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos ACB$$

$$(\sqrt{7})^2 = AC^2 + 2^2 - 2AC \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$7 = AC^2 - 2AC + 4$$

$$AC^2 - 2AC - 3 = 0$$

За теоремою Вієта:

$$AC = 3$$

$$AC = -1 \text{ (не задовольняє умову)}$$

**Відповідь:** 3 см

**№6**

Дві сторони трикутника дорівнюють 10 см і 12 см, а синус кута між ними дорівнює 0,6. Знайдіть третю сторону трикутника. Скільки розв'язків має задача?

**Розв'язання:**

Так як з основної тригонометричної тотожності:

$$\cos \gamma = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \gamma}$$

То:

$$\cos \gamma = \pm \sqrt{1 - 0,6^2} = \pm \sqrt{0,64} = \pm 0,8$$

Отже задача має два розв'язки:

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= 0,8 \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \\ &= 10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12 \\ &\quad \cdot 0,8 = 100 + 144 - 192 \\ &= 52 = 2\sqrt{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= -0,8 \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \\ &= 10^2 + 12^2 + 2 \cdot 10 \cdot 12 \\ &\quad \cdot 0,8 = 244 + 192 = 436 \\ &= 2\sqrt{109} \end{aligned}$$

**Відповідь:**  $2\sqrt{13}$  см або  $2\sqrt{109}$  см

#### IV. Підсумок уроку

- Сформулюйте теорему косинусів
- Дати відповідь на запитання учнів

#### V. Домашнє завдання

Опрацювати §11

Виконати № 495, 497, 506, 510, 526