

Тема: Рівняння прямої

Мета:

- *Навчальна:* розглянути пряму, що проходить через початок координат, її кутовий коефіцієнт; розміщення прямої $y = kx$ у системі координат; пряму, що не проходить через початок координат і має кутовий коефіцієнт; рівняння прямої, що проходить через дві задані точки; загальне рівняння прямої; розташування прямої відносно системи координат; умову паралельності прямих; координати точки перетину двох прямих;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння стисло та грамотно висловлювати свої міркування та обґрунтовувати їхню правильність;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук;

Компетенції:

- математичні
- комунікативні

Тип уроку: засвоєння нових знань;

Обладнання: конспект, презентація, мультимедійне обладнання;

Хід уроку

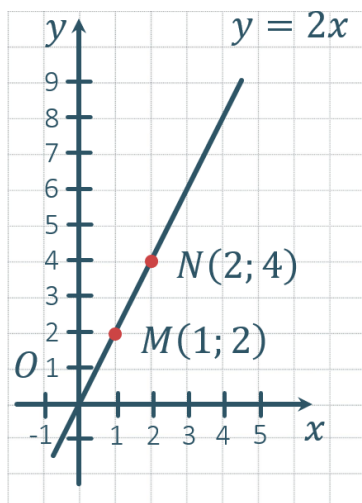
I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

II. Вивчення нового матеріалу

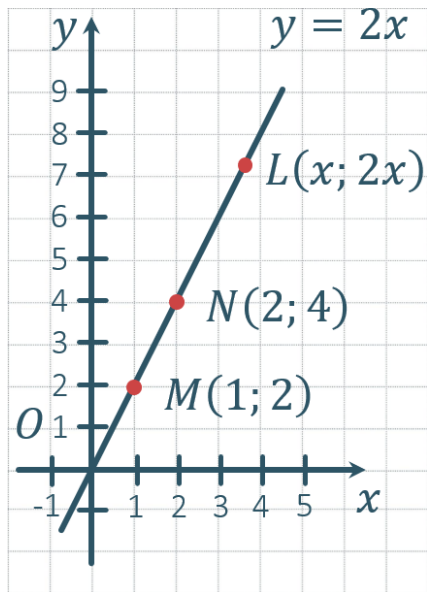
// Пряма, що проходить через початок координат, її кутовий коефіцієнт

- Пригадайте з курсу алгебри, яка геометрична фігура є графіком функції $y = 2x$?



(Пряма)

- Які координати буде мати будь-яка точка прямої $y = 2x$?

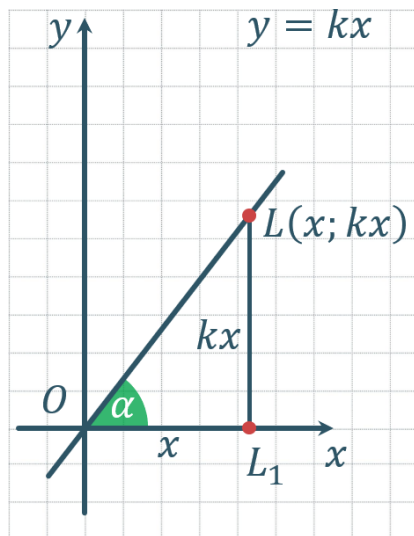


(Будь-яка точка прямої $y = 2x$ буде мати координати $(x; 2x)$)

Пряма, що проходить через початок координат, задається рівнянням:

$$y = kx$$

k – кутовий коефіцієнт прямої.



- Розгляньте $\triangle OL_1L$ ($\angle L_1 = 90^\circ$) і поясніть, чому $\text{tg } \alpha = k$?

$$\text{tg } \alpha = \frac{LL_1}{OL_1} = \frac{kx}{x} = k$$

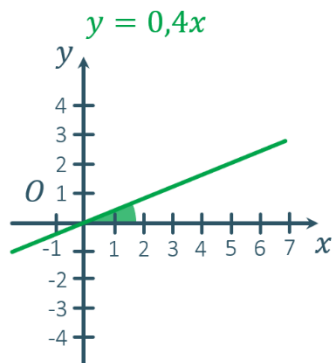
- Який можемо зробити висновок про кутовий коефіцієнт прямої?

Кутовий коефіцієнт прямої дорівнює тангенсу кута між даною прямою й додатною піввіссю Ox :

$$k = \text{tg } \alpha$$

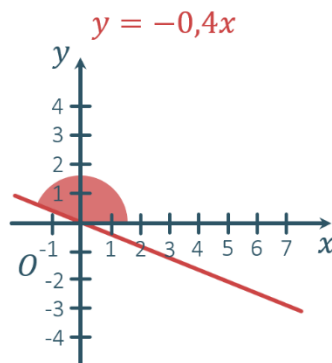
// Розміщення прямої $y = kx$ у системі координат

Розглянемо прямі $y = 0,4x$ і $y = -0,4x$. Перша пряма утворює з додатною піввіссю x гострий кут, друга – тупий. Так як рівняння, що задають ці прямі відрізняються тільки знаком, то можемо зробити наступний висновок:



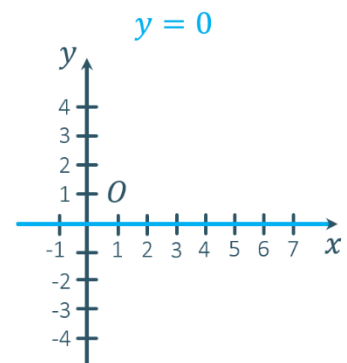
$k > 0$ якщо пряма утворює гострий кут з додатним напрямом осі x

I і III координатні чверті



$k < 0$ якщо пряма утворює тупий кут з додатним напрямом осі x

II і IV координатні чверті

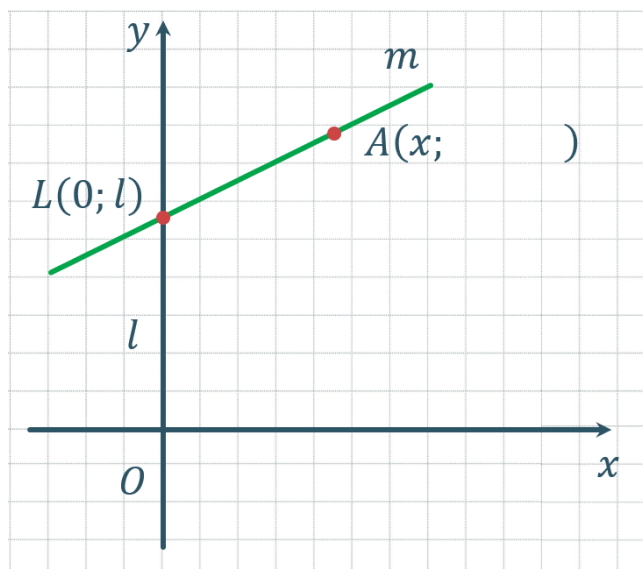


$k = 0$ якщо пряма належить осі x

збігається з віссю Ox

Якщо $k = 0$, то рівняння набуває вигляду $y = 0 \cdot x = 0$, тому дана пряма збігається з віссю x .

// Пряма, що не проходить через початок координат і має кутовий коефіцієнт

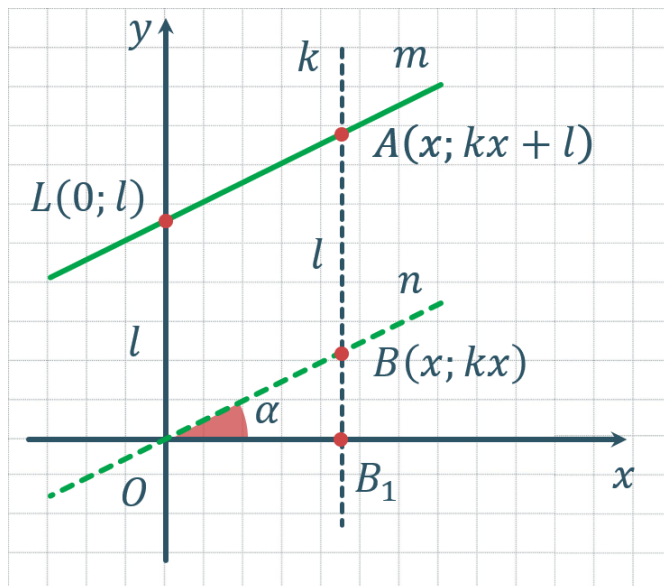


Нехай:

$$m \cap Oy = L$$

k – кутовий коефіцієнт прямої m

A – довільна точка прямої m з абсцисою x



Знайдемо ординату точки A :

Побудуємо через початок координат $n \parallel m$.

Побудуємо через т. A пряму k паралельну осі Oy .

$$k \cap n = B$$

$$k \cap Ox = B_1$$

$$BB_1 = kx$$

$LABO$ – паралелограм за означенням, тому $AB = LO = l$

Так як $AB_1 = AB + BB_1$, то ордината точки A дорівнює $y = kx + l$

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k : $y = kx + l$

Задача 1

Доведіть, що рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k , яка проходить через точку $A(x_0; y_0)$, має вигляд $y - y_0 = k(x - x_0)$

Доведення:

Так як пряма проходить через т. $A(x_0; y_0)$, то координати цієї точки задовольняють рівняння, отже:

$$y_0 = kx_0 + l, \text{ тому } l = y_0 - kx_0$$

$$\left. \begin{array}{l} y = kx + l \\ l = y_0 - kx_0 \end{array} \right| \rightarrow y = kx + (y_0 - kx_0)$$

$$y = kx + (y_0 - kx_0)$$

$$y - y_0 = kx - kx_0$$

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

Доведено.

Задача 2

Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(2; 4)$ і утворює з додатним напрямком осі абсцис кут 45°

Розв'язання:

Так як $k = \operatorname{tg} \alpha$, то $k = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$ і $y - y_0 = k(x - x_0)$, то:

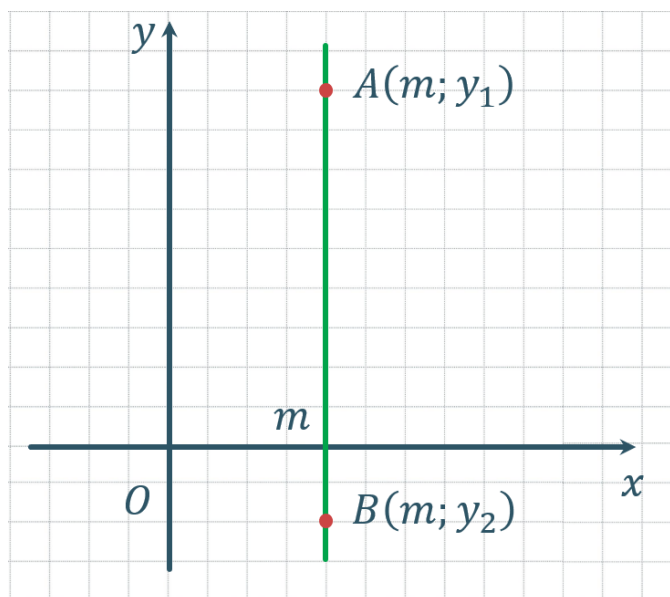
$$y - 4 = 1(x - 2)$$

$$y - 4 = x - 2$$

$$y - x - 2 = 0$$

Відповідь: $y - x - 2 = 0$

// Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки



1) $x_1 = x_2 = m$

- Так як $x_1 = x_2 = m$, то який можемо зробити висновок про всі абсциси точок прямої m ?

Так як усі точки прямої m мають одну й ту саму абсцису, що дорівнює m , то рівняння прямої має вигляд:

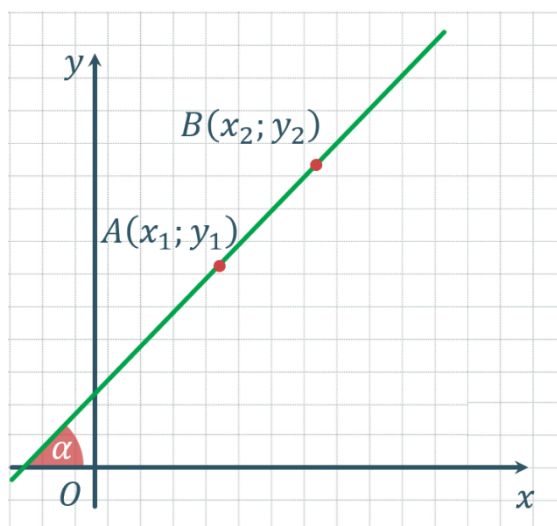
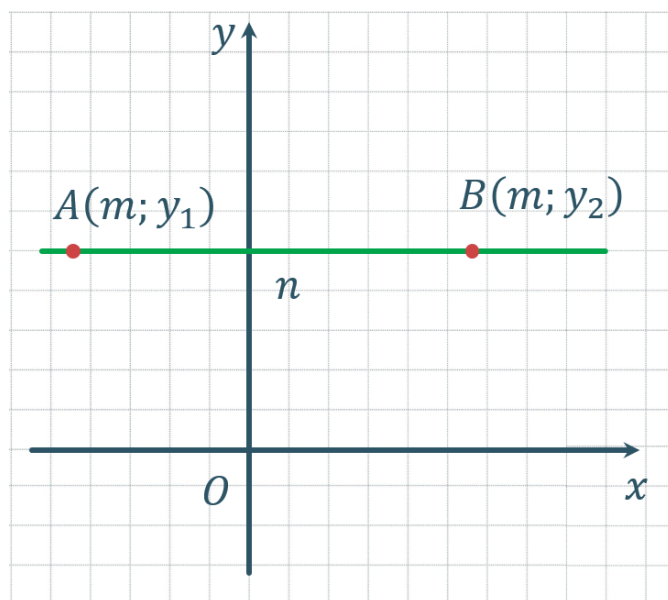
$$x = m$$

2) $y_1 = y_2 = n$

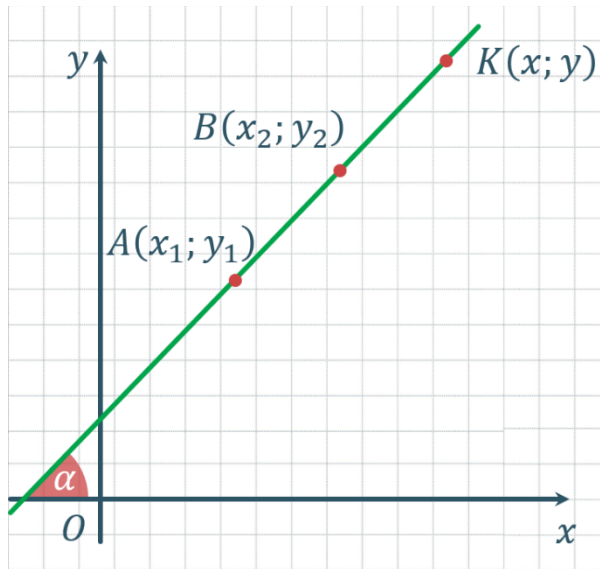
- Так як $y_1 = y_2 = n$, то який можемо зробити висновок про всі ординати точок прямої n ?

Так як усі точки прямої n мають одну й ту саму ординату, що дорівнює n , то рівняння прямої має вигляд:

$$y = n$$



3) $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$



Нехай $K(x; y)$ - деяка точка прямої.

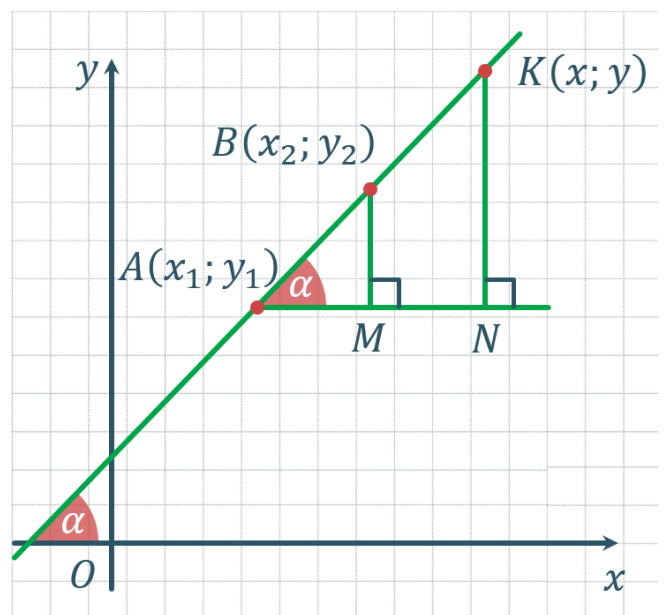
Побудуємо через т. A пряму, паралельну осі x , а через точки B і K - прямі, паралельні осі y .

$$BM \perp AN, KN \perp AN, \angle BAN = \alpha$$

- Розгляньте $\triangle BMA$ і $\triangle KNA$. Поясніть, чому вони подібні

$\triangle BMA$ і $\triangle KNA$ подібні ($\angle A$ - спільний, $\angle ABM = \angle AKN$), отже відповідні сторони пропорційні. Складемо пропорцію:

$$\frac{AN}{AM} = \frac{KN}{BM}$$



- Поясніть, як можемо виразити сторони AN , AM , KN і BM ?

$$AN = x - x_1$$

$$AM = x_2 - x_1$$

$$KN = y - y_1$$

$$BM = y_2 - y_1$$

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $(x_1; y_1)$ і $(x_2; y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Задача 3

Скласти рівняння прямої, що проходить через точки $M(4; 7)$ і $N(2; -3)$

Розв'язання:

Запишемо загальне рівняння прямої:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Підставимо дані в задачі значення:

$$\frac{x - 4}{2 - 4} = \frac{y - 7}{-3 - 7}$$

$$\frac{x - 4}{-2} = \frac{y - 7}{-10}$$

$$-10(x - 4) = -2(y - 7)$$

$$-10x + 40 = -2y + 14$$

$$-10x + 2y + 26 = 0$$

$$-5x + y + 13 = 0$$

$$y = 5x - 13$$

Відповідь: $y = 5x - 13$

// Загальне рівняння прямої

Запишемо загальне рівняння прямої:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Застосуємо основну властивість пропорції і спростимо рівняння прямої, що проходить через дві задані точки:

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) = (x_2 - x_1)(y - y_1)$$

$$xy_2 - xy_1 - x_1y_2 + x_1y_1 = x_2y - x_2y_1 - x_1y + x_1x_1$$

$$(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + (y_1x_2 - x_1y_2) = 0$$

Замінімо:

$$y_2 - y_1 = a$$

$$x_1 - x_2 = b$$

$$y_1x_2 - x_1y_2 = c$$

$ax + by + c = 0$ – загальне рівняння прямої

Задача 4

Знайдіть точки перетину прямої $-2x - y + 4 = 0$ з осями координат

Розв'язання:

1) Нехай $A(x; 0)$ - точка перетину прямої з віссю абсцис

$$-2x - 0 + 4 = 0$$

$$2x = 4$$

$x = 2$, отже $A(2; 0)$ - точка перетину прямої з віссю абсцис

2) Нехай $B(0; y)$ - точка перетину прямої з віссю ординат

$$-2 \cdot 0 - y + 4 = 0$$

$y = 4$, отже $B(0; 4)$ - точка перетину прямої з віссю ординат

Відповідь: $(2; 0)$ і $(0; 4)$

// Розташування прямої відносно системи координат

1) $a = 0, b \neq 0$
 $by + c = 0$

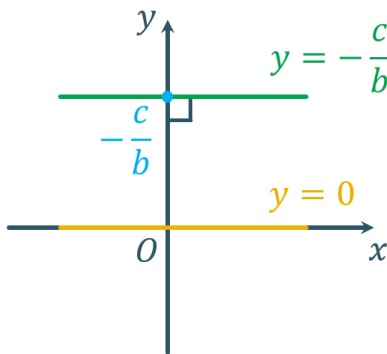
- Що можемо сказати про ординати всіх точок даної прямої?

Усі точки цієї прямої мають одну і ту саму ординату

$$y = -\frac{c}{b}$$

- Якщо $c = 0$, де буде знаходитися така пряма?

У такому випадку пряма $y = 0$ збігається з віссю x



2) $b = 0, a \neq 0$
 $ax + c = 0$

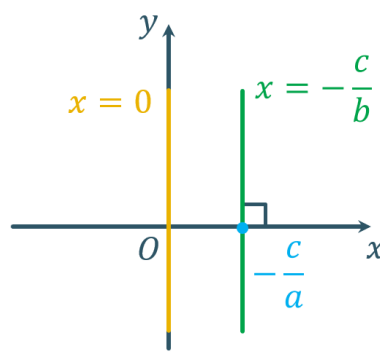
- Що можемо сказати про абсциси всіх точок даної прямої?

Усі точки цієї прямої мають одну і ту саму абсцису

$$x = -\frac{c}{a}$$

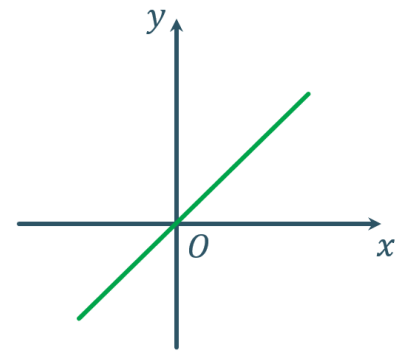
- Якщо $c = 0$, де буде знаходитися така пряма?

У такому випадку пряма $x = 0$ збігається з віссю y

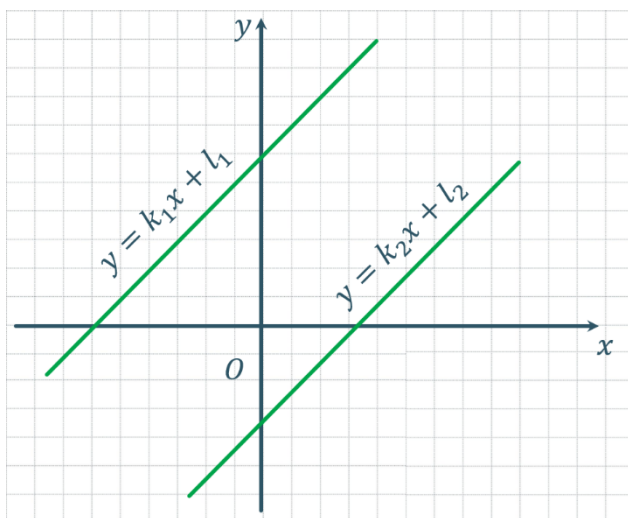


3) $a \neq 0, b \neq 0, c = 0$
 $ax + by = 0$

Так як $c = 0$, то координати $(0; 0)$ задовольняють це рівняння, тому пряма проходить через початок координат



// Умова паралельності прямих

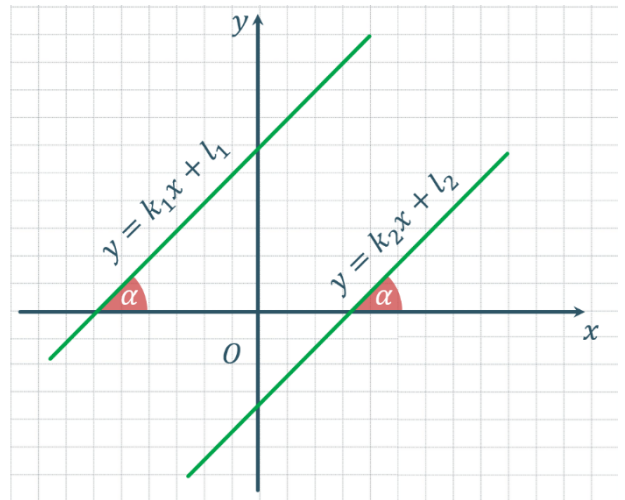


- Нехай дано дві паралельні прямі. Чи будуть рівні кути, які утворюють дві паралельні прямі з додатним напрямком осі x ?

(Так)

- Поясніть, чому кутові коефіцієнти даних паралельних прямих k_1 і k_2 рівні між собою?

Так як дані прямі мають рівні кути, які вони утворюють з додатним напрямом осі x , то вони також мають і рівні тангенси цих кутів. Так як кутовий коефіцієнт прямої дорівнює тангенсу кута між даною прямою й додатною піввіссю Ox ($k = \operatorname{tg} \alpha$), то $k_1 = k_2$



- Чи можемо стверджувати, що коли $k_1 = k_2$, то тангенси кутів, які утворюють прямі з додатним напрямом осі x – рівні між собою? Який можемо зробити висновок?

Так. Можемо зробити висновок, що ці прямі паралельні.

Прямі $y = k_1x + l_1$ і $y = k_2x + l_2$ паралельні тоді і тільки тоді, коли $k_1 = k_2$.

Задача 5

Чи є паралельними прямі $y = 0,7x + 72$ і $y = \frac{7}{10}x - 3$?

Розв'язання:

$$0,7 = \frac{7}{10}$$

Так як кутові коефіцієнти прямих є рівними, то ці прямі паралельні

Відповідь: прямі паралельні.

// Координати точки перетину двох прямих

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

- Якщо дві дані прямі мають спільну точку, то координати цієї точки задовольняють обидва рівняння. Які у вас є ідеї, що допоможуть знайти координати такої точки?

(Учні висловлюють власну думку)

Координати точки перетину є розв'язком системи рівнянь, якими задано ці прямі.

Задача 6

Знайдіть точку перетину двох прямих:

$$4x + y - 3 = 0$$

$$3x + 3y - 9 = 0$$

Розв'язання:

Складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 4x + y - 3 = 0 \\ 3x + 3y - 9 = 0 \end{cases}$$

- Пригадайте з курсу алгебри 7 класу, як розв'язати систему рівнянь?
(Дану систему рівнянь можна розв'язати, наприклад, методом додавання)

$$\begin{cases} 4x + y - 3 = 0 \mid \cdot (-3) \\ 3x + 3y - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -12x - 3y + 9 = 0 \\ 3x + 3y - 9 = 0 \end{cases}$$

$$-9x = 0 \mid \cdot (-1)$$

$$9x = 0$$

$$x = 0$$

Підставимо знайдене значення змінної x в перше рівняння системи:

$$4 \cdot 0 + y - 3 = 0$$

$$y = 3$$

Координати шуканої точки: $A(0; 3)$

Відповідь: $(0; 3)$

III. Розв'язування завдань

№1

// Усно

Які з рівнянь є рівняннями прямої?

1) $x^2 + y^3 = 4$

4) $7x - 3 = 0$

2) $3x - 4y + 1 = 0$

5) $x + y^2 = 0$

3) $x^3 - 3y + 12 = 0$

6) $x - 5y = 0$

Відповідь: 2, 4, 6

№2

// Усно

Чи перетинаються прямі?

1) $y = 3x + 4$ і $y = 3x - 7$

2) $y = 0,2x - 23$ і $y = \frac{2}{10} + 0,5x$

3) $y = 7x - 2$ і $y = 4x - 3$

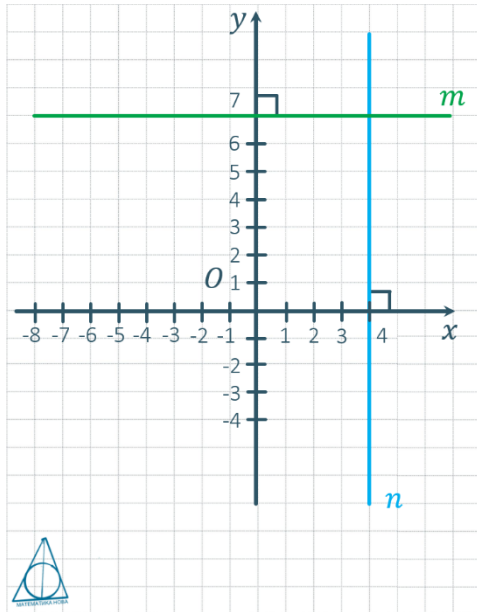
Розв'язання:

- 1) Так як кутові коефіцієнти прямих є рівними, то вони паралельні, отже – не перетинаються.
- 2) Кутові коефіцієнти прямих не є рівними ($0,2 \neq 0,5$), отже ці прямі не паралельні і перетинаються

3) Так як кутові коефіцієнти прямих не є рівними ($7 \neq 4$), то вони не є паралельними, отже вони перетинаються

Відповідь: 1) Ні; 2) Так; 3) Так

№3



Запишіть рівняння прямих m і n

Розв'язання:

Так як всі ординати прямої m мають однакове значення, то рівняння прямої m :

$$y = 7$$

Так як всі абсциси прямої n мають однакове значення, то рівняння прямої n :

$$x = 4$$

Відповідь: $y = 7, x = 4$

№4

Складіть рівняння прямої, що проходить через точки:

1) $M(2; 5)$ і $N(-2; 7)$

2) $M(4; 3)$ і $N(-4; 3)$

3) $M(5; 6)$ і $N(7; 8)$

4) $M(-1; 4)$ і $N(-4; -5)$

Розв'язання:

Запишемо загальне рівняння прямої, що проходить через дві точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

1) $M(2; 5)$ і $N(-2; 7)$

$$\frac{x - 2}{-2 - 2} = \frac{y - 5}{7 - 5}$$

$$(x - 2) \cdot 2 = (y - 5) \cdot (-4)$$

$$2x - 4 = -4y + 20$$

$$2x + 4y - 24 = 0$$

2) $M(4; 3)$ і $N(-4; 3)$

$$\frac{x - 4}{-4 - 4} = \frac{y - 3}{3 - 3}$$

$$(x - 4) \cdot 0 = (y - 3) \cdot (-8)$$

$$0 = -8y + 24$$

$$8y = 24$$

$$y = 3$$

3) $M(5; 6)$ і $N(7; 8)$

$$\frac{x-5}{7-5} = \frac{y-6}{8-6}$$

$$(x-5) \cdot 2 = (y-6) \cdot 2$$

$$2x - 10 = 2y - 12$$

$$2x - 2y + 2 = 0$$

4) $M(-1; 4)$ і $N(-4; -5)$

$$\frac{x-(-1)}{-4-(-1)} = \frac{y-4}{-5-4}$$

$$(x+1) \cdot (-9) = (y-4) \cdot (-3)$$

$$-9x - 9 = -3y + 12$$

$$-9x + 3y - 21 = 0$$

Відповідь: 1) $2x + 4y - 24 = 0$; 2) $y = 3$; 3) $2x - 2y + 2 = 0$; 4) $-9x + 3y - 21 = 0$

IV. Підсумок уроку

- Який вигляд має рівняння прямої, що проходить через початок координат і має кутовий коефіцієнт?
($y = kx$)
- Який вигляд має рівняння прямої, що не проходить через початок координат і має кутовий коефіцієнт?
($y = kx + l$)
- Який вигляд має рівняння прямої, що проходить через дві задані точки?
 $\left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \right)$
- Який вигляд має загальне рівняння прямої?
($ax + by + c = 0$)
- За якої умови прямі $y = k_1x + l_1$ і $y = k_2x + l_2$ будуть паралельними?
(Прямі $y = k_1x + l_1$ і $y = k_2x + l_2$ паралельні тоді і тільки тоді, коли $k_1 = k_2$)
- Як знайти координати точки перетину двох прямих, що задані у загальному вигляді?
(Координати точки перетину є розв'язком системи рівнянь, якими задано ці прямі)

V. Домашнє завдання

Опрацювати §5

Виконати № 155, 160, 162, 174