Тема: Координати середини відрізка. Відстань між двома точками із заданими координатами

Мета:

- *Навчальна:* навчити знаходити координати середини відрізка, коли відомі координати його кінців; навчити знаходити відстань між двома точками за їх координатами;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння стисло та грамотно висловлювати свої міркування та обґрунтовувати їхню правильність;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук;

Компетенції:

- математичні
- комунікативні

Тип уроку: засвоєння нових знань;

Обладнання: конспект, презентація, мультимедійне обладнання;

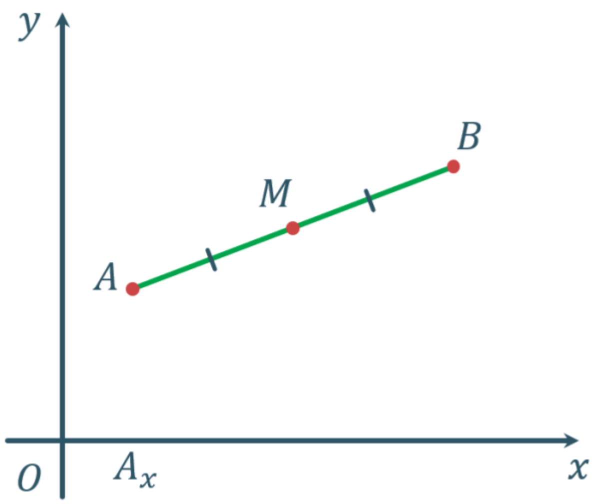
Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

II. Вивчення нового матеріалу

// Координати середини відрізка

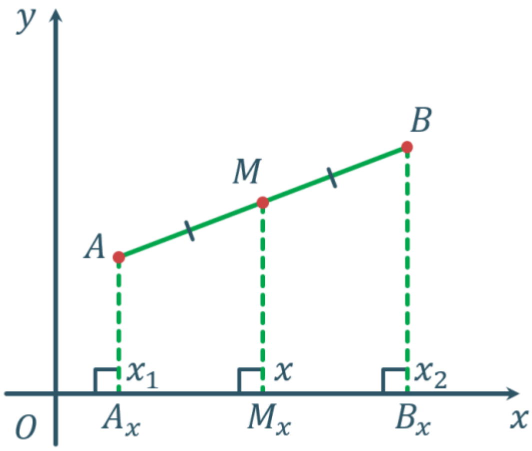


Теорема (формули координат середини відрізка)

Координати середини відрізка обчислюються за формулами:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

де $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ – кінці відрізка, $M(x; y)$ – середина відрізка



Доведення:

Розглянемо випадок, коли $x_1 < x_2$.

Побудуємо перпендикуляри AA_x, MM_x, BB_x до осі Ox.

- Поясніть, чому $A_xM_x = M_xB_x$?

$$\left.\begin{matrix} AA_x \parallel MM_x \parallel BB_x \\ M - \text{середина } AB \end{matrix}\right| \xrightarrow[\text{\textit{Фалеса}}]{\text{\textit{За теоремою}}} A_xM_x = M_xB_x$$

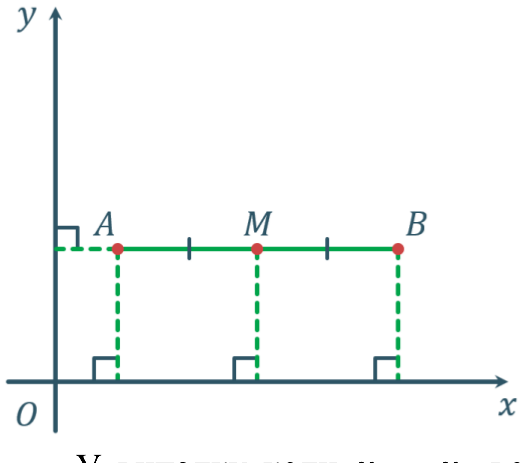
$$A_xM_x = M_xB_x \rightarrow |x - x_1| = |x_2 - x|$$

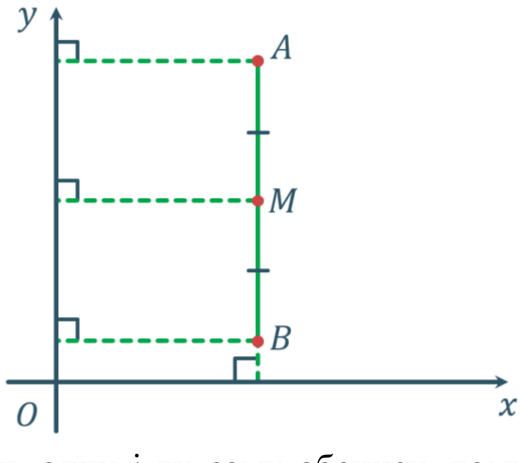
$$\left.\begin{matrix} |x - x_1| = |x_2 - x| \\ x_1 < x < x_2 \end{matrix}\right| \rightarrow x - x_1 = x_2 - x$$

$$x - x_1 = x_2 - x$$
$$2x = x_1 + x_2$$
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Аналогічне доведення має випадок, коли $x_1 > x_2$, так як $|x - x_1| = |x_2 - x|$

- Переконайтеся, що формули координат середини відрізка справджуються також коли відрізок AB перпендикулярний до однієї з осей координат, тобто **у випадках коли $x_1 = x_2$**



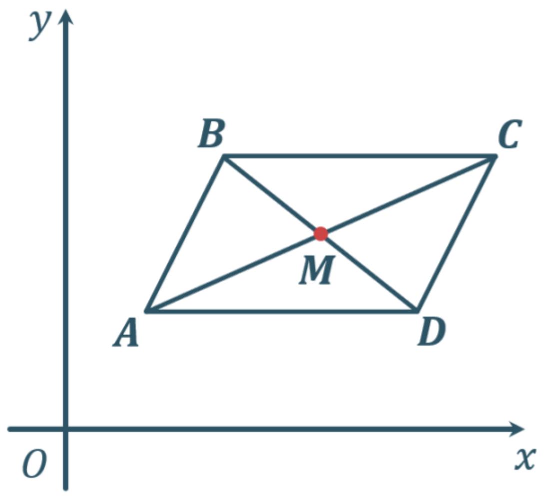


У випадку коли $x_1 = x_2$ всі точки мають одну і ту саму абсцису, тому формула також справджуються і в цих випадках.

Отже, формула справджується в випадках коли $x_1 < x_2$, $x_1 > x_2$ і $x_1 = x_2$.
Аналогічне доведення має формула $y = \frac{y_1+y_2}{2}$

Доведено

Задача



Дано три вершини паралелограма $ABCD$: $A(2;3)$; $B(4;7)$; $C(11;7)$. Знайдіть координати вершини D.

- Які у вас є ідеї для розв'язання цієї задачі?

  Так як діагоналі паралелограма перетинаються в одній точці і цією точкою діляться навпіл, то знайдемо коодинати середини діагоналі AC – координати точки M. Так як координати точки M – це також координати середини діагоналі BD, скористаємося цим для знаходження координат точки D.

  Знайдемо координати точки M:

  $$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2 + 11}{2} = 6{,}5$$

  $$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{3 + 7}{2} = 5$$

  $M(6{,}5; 5)$

  Знайдемо координати точки D:

  $$\frac{x_B + x_D}{2} = x_M$$

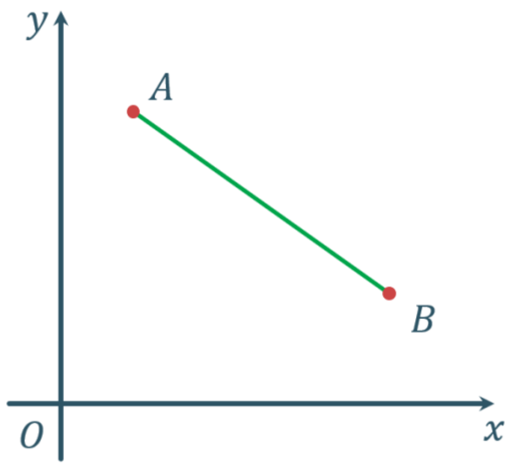
  $$x_D = 2x_M - x_B = 2 \cdot 6{,}5 - 4 = 9$$

  $$\frac{y_B + y_D}{2} = y_M$$

  $$y_D = 2y_M - y_B = 2 \cdot 5 - 7 = 3$$

  $D(9; 3)$

Відповідь: $D(9; 3)$

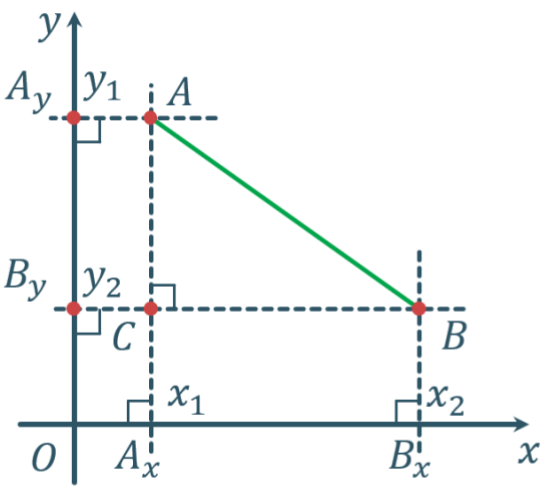


Теорема ***(формула відстані між двома точками)***

Відстань між точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ обчислюється за формулою:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Доведення:



Розглянемо випадок, коли $x_1 \neq x_2$; $y_1 \neq y_2$ (тобто $x_1 < x_2$ або $x_1 > x_2$ і $y_1 < y_2$ або $y_1 > y_2$)

Побудуємо перпендикуляри до координатних осей з точок A і B. Отримані перпендикуляри перетнуть координатні осі у точках $A_x(x_1; 0)$, $B_x(x_2; 0)$, $A_y(0; y_1)$, $B_y(0; y_2)$

- Поясніть, чому $BC = |x_1 - x_2|$ і $AC = |y_1 - y_2|$?

Відстань між точками A_x і B_x дорівнює $|x_1 - x_2|$, а відстань між точками A_y і B_y дорівнює $|y_1 - y_2|$.

Так як CBB_xA_x – прямокутник, то $BC = |x_1 - x_2|$.
Аналогічно $AC = |y_1 - y_2|$

З прямокутного ΔACB за теоремою Піфагора:

$$AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

- Переконайтеся, що ця формула справджується і у випадку коли відрізок AB паралельний осям координат або точки A і B збігаються

Розглянемо випадок, коли $x_1 = x_2$; $y_1 \neq y_2$:

$AB = |y_1 - y_2|$ *(такий самий результат ми отримаємо за допомогою формули* $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$*)*

Розглянемо випадок, коли $x_1 \neq x_2$; $y_1 = y_2$:
$AB = |x_1 - x_2|$ *(такий самий результат ми отримаємо за допомогою формули* $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$*)*

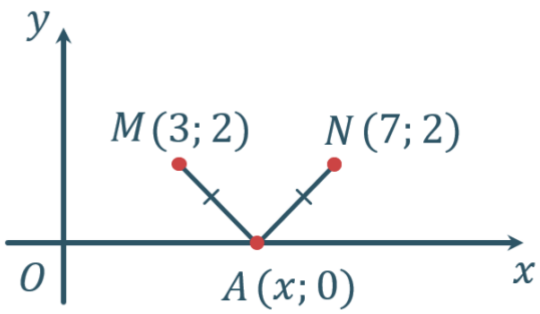
Розглянемо випадок, коли $x_1 = x_2$; $y_1 = y_2$:
В такому випадку точки A і B – співпадають, в такому випадку відстань між точками за формулою $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ також дорівнює нулю.

Доведено

Задача

Знайдіть на осі абсцис точку, яка рівновіддалена від точок $M(3;2)$ і $N(7;2)$

- Які у вас є ідеї для розв'язання цієї задачі?



Нехай $A_x(x,0)$ – шукана точка.
Так як $MA = NA$, то прирівняємо їх довжини за допомогою формули відстані між точками:

$(x-3)^2 + (0-2)^2 = (x-7)^2 + (0-2)^2$
$x^2 - 6x + 9 + 0 - 2 \cdot (0 \cdot 2) + 4 = x^2 - 14x + 49 + 0 - 2 \cdot (0 \cdot 2) + 4$
$-6x + 9 + 4 = -14x + 49 + 4$
$8x = 40$
$x = 5$

Відповідь: $A(5;0)$

III. Розв'язування завдань

№1

Знайдіть координати середини відрізка MN, якщо:
1) $M(0;-1),\ N(4;5)$
2) $M(-3;6),\ N(1;2)$
3) $M(5;7),\ N(-3;-5)$
4) $M(-4;0),\ N(-3;3)$

Розв'язання:

Нехай O – середина відрізка MN, тоді:

1) $x_O = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{0+4}{2} = 2;\ y_O = \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{-1+5}{2} = 2$

   $O(2; 2)$

2) $x_O = \frac{-3+1}{2} = -1;\ y_O = \frac{6+2}{2} = 4$

   $O(-1; 4)$

3) $x_O = \frac{5+(-3)}{2} = 1;\ y_O = \frac{7+(-5)}{2} = 1$

   $O(1; 1)$

4) $x_O = \frac{-4+(-3)}{2} = 3{,}5;\ y_O = \frac{0+3}{2} = 1{,}5$

   $O(3{,}5; 1{,}5)$

№2

K – середина відрізка MN. Знайдіть координати:

1) Точки N, якщо $M(2; 6)$, $K(5; 1)$
2) Точки M, якщо $N(3; -3)$, $K(-1; 2)$

Розв'язання:

1) $x_K = \frac{x_M + x_N}{2};\ y_K = \frac{y_M + y_N}{2}$

   $\frac{2 + x_N}{2} = 5 \rightarrow x_N = 5 \cdot 2 - 2 = 8$

   $\frac{6 + y_N}{2} = 1 \longrightarrow y_N = 2 \cdot 1 - 6 = -4$

   $N(8; -4)$

2) $x_K = \frac{x_M + x_N}{2};\ y_K = \frac{y_M + y_N}{2}$

   $\frac{x_M + 3}{2} = -1 \rightarrow x_M = 2 \cdot (-1) - 3 = -5$

   $\frac{y_M - 3}{2} = 2 \rightarrow y_M = 2 \cdot 2 + 3 = 7$

   $M(-5; 7)$

Відповідь: 1) $N(8; -4)$; 2) $M(-5; 7)$

№3

Знайдіть периметр трикутника KLN, якщо $K(-3; 2)$, $L(3; 10)$, $N(3; 2)$. Доведіть, що цей трикутник – прямокутний.

Розв'язання:

Знайдемо довжини сторін ΔKLN:

$KL = \sqrt{(-3-3)^2 + (2-10)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$

$LN = \sqrt{(3-3)^2 + (10-2)^2} = \sqrt{0+64} = \sqrt{64} = 8$

$KN = \sqrt{(-3-3)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{36+0} = \sqrt{36} = 6$

$P_{\Delta KLN} = KL + LN + KN = 10 + 8 + 6 = 24$

За теоремою, оберненою до теореми Піфагора (вивчена у 8 класі):

Якщо сума квадратів двох сторін трикутника дорівнює квадрату третьої сторони, то такий трикутник є прямокутним.

Отже, перевіримо, чи $KL^2 = LN^2 + KN^2$?

$$\left.\begin{array}{c} 10^2 = 8^2 + 6^2 \\ 100 = 64 + 36 \\ 100 = 100 \end{array}\right| \to \Delta KLN - \text{прямокутний}$$

Відповідь: 24 см

№4

$A(-4; 1)$, $B(2; 9)$, $C(8; 1)$ - вершини трикутника ABC. Доведіть, що трикутник ABC – рівнобедрений.

Розв'язання:

$AB = \sqrt{(-4-2)^2 + (1-9)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$

$AC = \sqrt{(-4-8)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{144} = 12$

$BC = \sqrt{(2-8)^2 + (9-1)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$

Так як $AB = BC$, то ΔABC – рівнобедрений.

Доведено.

№5

Дано точки $M(-3; 4)$ і $N(9; 4)$. Знайдіть координати точки A, яка ділить відрізок MN у відношенні 1: 3, рахуючи від точки M.

Розв'язання:

Так як $MA: AN = 1: 3$, то $MA = \frac{1}{4}MN$

Нехай L – середина відрізка MN, тоді A – середина відрізка ML.

Знайдемо координати точки L:

$$x_L = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{-3+9}{2} = 3$$

$$y_L = \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{4+4}{2} = 4$$

$L(3; 4)$

Знайдемо координати точки A:

$$x_A = \frac{x_M + x_L}{2} = \frac{-3+3}{2} = 0$$

$$y_A = \frac{y_M + y_L}{2} = \frac{4+4}{2} = 4$$

Відповідь: $A(0; 4)$

IV. Підсумок уроку

- Як знайти координати середини відрізка, якщо відомі координати його кінців?
- Як знайти відстань між двома точками, якщо відомі їх координати?
- Чи залежать формули координат середини відрізка від розміщення його кінців у системі координат?
  (Не залежить)
- Як знайти довжину медіани трикутника, знаючи координати його вершин?
  (Необхідно визначити координати основи медіани та знайти відстань від цієї точки до протилежної сторони трикутника)

V. Домашнє завдання

Опрацювати §3
Виконати № 68, 72, 78, 80, 99