

Варіант 1

Початковий рівень

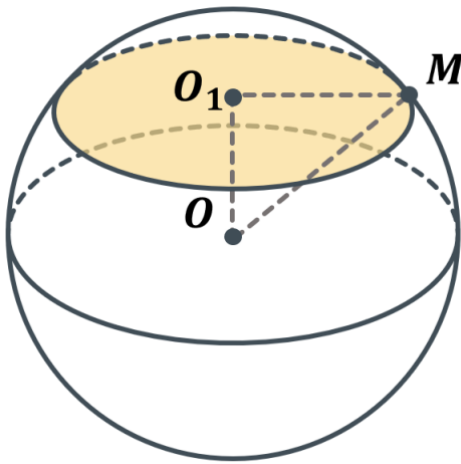
1. (3 б) Встановіть відповідність:

- | | |
|--|------------------------------|
| 1) $V = S_{\text{основи}} h$ | А) Прямокутний паралелепіпед |
| 2) $V = \frac{1}{3} S_{\text{основи}} h$ | Б) Куля |
| 3) $V = a^3$ | В) Конус |
| 4) $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ | Г) Піраміда |
| 5) $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ | Д) Призма |
| 6) $V = abc$ | |

Відповідь:	А	Б	В	Г	Д
	6	5	4	2	1

Середній рівень

2. (1 б) На відстані 12 см від центру кулі побудовано переріз, радіус якого дорівнює 9 см. Знайдіть об'єм кулі і площу її поверхні.



Дано:

$$OO_1 = 12 \text{ см};$$

$$O_1M = 9 \text{ см};$$

Знайти:

$$V_{\text{кулі}} - ?$$

$$S_{\text{кулі}} - ?$$

Розв'язок:

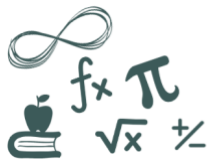
З прямокутного $\triangle OO_1M$:

$$OM = \sqrt{OO_1^2 + O_1M^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{144 + 91} = \sqrt{225} = 15 \text{ см}$$

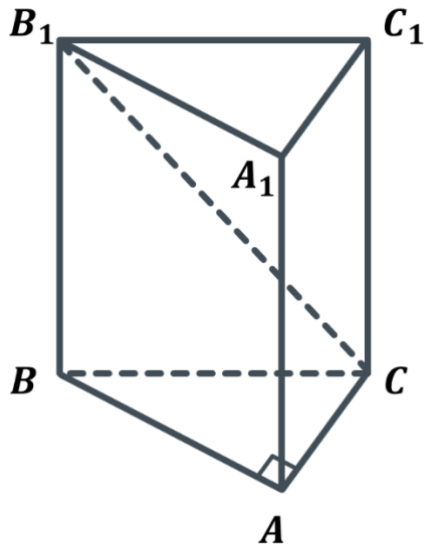
$$V_{\text{кулі}} = \frac{4}{3} \pi \cdot OM^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 15^3 = 4500\pi \text{ см}^3$$

$$S_{\text{кулі}} = 4\pi \cdot OM^2 = 4\pi \cdot 15^2 = 900\pi \text{ см}^2$$

Відповідь: $V_{\text{кулі}} = 4500\pi \text{ см}^3$; $S_{\text{кулі}} = 900\pi \text{ см}^2$



3. (2 б) Основа прямої призми – прямокутний трикутник з катетами 3 см і 4 см. Діагональ бічної грані, що містить гіпотенузу трикутника, дорівнює 13 см. Знайдіть об'єм призми.



Дано:

$ABCA_1B_1C_1$ – пряма призма;

$\triangle BAC$ – прямокутний;

$AC = 3$ см;

$BA = 4$ см;

$B_1C = 13$ см;

Знайдіть:

$V_{ABCA_1B_1C_1} - ?$

Розв'язок:

Розглянемо прямокутний $\triangle BAC$:

$$\left. \begin{array}{l} AC = 3 \text{ см} \\ BA = 4 \text{ см} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BAC - \text{єгипетський} \Rightarrow BC = 5 \text{ см}$$

З прямокутного $\triangle B_1BC$:

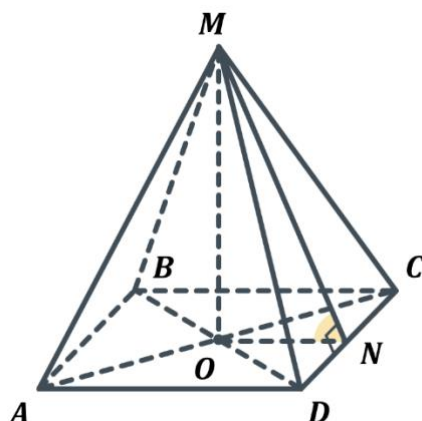
$$B_1B = \sqrt{B_1C^2 - BC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \text{ см}$$

$$V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{ABCA_1B_1C_1} \cdot B_1B = \frac{BA \cdot AC}{2} \cdot B_1B = \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 12 = 72 \text{ см}^3$$

Відповідь: 72 см^3

Достатній рівень

4. (3 б) Апофема правильної чотирикутної піраміди дорівнює l і утворює з площиною основи піраміди кут α . Знайдіть об'єм піраміди.



Дано:

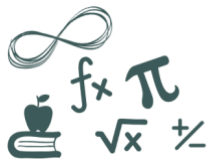
$MABCD$ – правильна чотирикутна піраміда;

$MN = l$;

$\angle MNO = \alpha$;

Знайти:

$V_{MABCD} - ?$



Розв'язок:

$МАВСD$ – правильна чотирикутна піраміда $\Rightarrow ABCD$ – квадрат;

Розглянемо прямокутний $\triangle MON$:

$$\sin N = \frac{MO}{MN}$$

$$MO = \sin N \cdot MN = l \sin \alpha$$

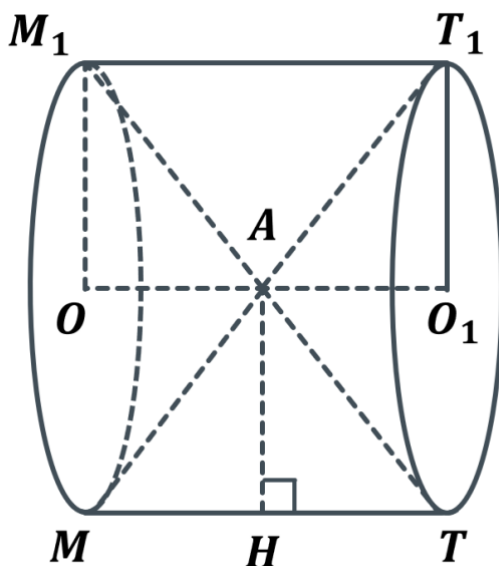
$$\begin{aligned} ON &= \sqrt{MN^2 - MO^2} = \sqrt{l^2 - (l \sin \alpha)^2} = \sqrt{l^2 - l^2 \sin^2 \alpha} \\ &= \sqrt{l^2(1 - \sin^2 \alpha)} = l \sqrt{\cos^2 \alpha} = l \cos \alpha \end{aligned}$$

$$BC = 2ON = 2l \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} V_{МАВСD} &= \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot MO = \frac{BC^2 \cdot MO}{3} = \frac{(2l \cos \alpha)^2 \cdot l \sin \alpha}{3} = \frac{4l^2 \cos^2 \alpha \cdot l \sin \alpha}{3} \\ &= \frac{4}{3} l^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{4}{3} l^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha$

5. (3 б) Рівнобедрений трикутник з основою 8 см і периметром 18 см обертається навколо прямої, що є паралельною основі і проходить через вершину найбільшого кута трикутника. Знайдіть об'єм тіла обертання.



Дано:

$\triangle MAT$ – рівнобедрений;

$MA = AT$;

$MT = 8$ см;

$P_{MAT} = 18$ см;

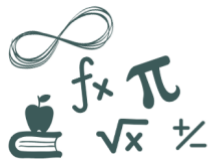
$OO_1 \parallel MT$;

Знайти:

$V_{\text{тіла}} - ?$

Розв'язок:

Об'єм утвореного тіла обертання складається з об'єму циліндра, від якої треба відняти два об'єми конуса з такою самою основою, як основа циліндра і висотою, що дорівнює половині висоти циліндра.



Радіус основи утвореного циліндра дорівнює висоті рівнобедреного трикутника, що побудована до основи цього трикутника. Висота утвореного циліндра – це основа рівнобедреного трикутника.

Розглянемо рівнобедрений $\triangle MAT$:

$$\left. \begin{array}{l} MT = 8 \text{ см} \\ MA = AT \\ P_{MAT} = 18 \text{ см} \end{array} \right| \Rightarrow MA = AT = \frac{18 - 8}{2} = 5 \text{ см}$$

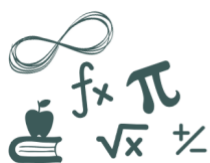
$$AH - \text{висота, медіана і бісектриса, отже } MH = HT = \frac{MT}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ см}$$

Розглянемо прямокутний $\triangle AHT$:

$$\left. \begin{array}{l} AT = 5 \text{ см} \\ HT = 4 \text{ см} \end{array} \right| \Rightarrow AH = 3 \text{ см}$$

$$\begin{aligned} V_{\text{тіла}} &= V_{\text{циліндра}} - 2V_{\text{конуса}} = \pi \cdot O_1T_1^2 \cdot MT - 2 \left(\frac{1}{3} \pi \cdot O_1T_1^2 \cdot HT \right) \\ &= \pi \cdot 3^2 \cdot 8 - 2 \left(\frac{1}{3} \pi \cdot 3^2 \cdot 4 \right) = 72\pi - 2 \cdot 12\pi = 72\pi - 24\pi \\ &= 48\pi \text{ см}^3 \end{aligned}$$

Відповідь: $48\pi \text{ см}^3$



Варіант 2

Початковий рівень

1. (3 б) Встановіть відповідність:

1) $V = S_{\text{основи}} h$

А) Куля

2) $V = \frac{1}{3} S_{\text{основи}} h$

Б) Піраміда

3) $V = a^3$

В) Призма

4) $V = \pi r^2 h$

Г) Прямокутний паралелепіпед

5) $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

Д) Циліндр

6) $V = abc$

Відповідь:

А

Б

В

Г

Д

5

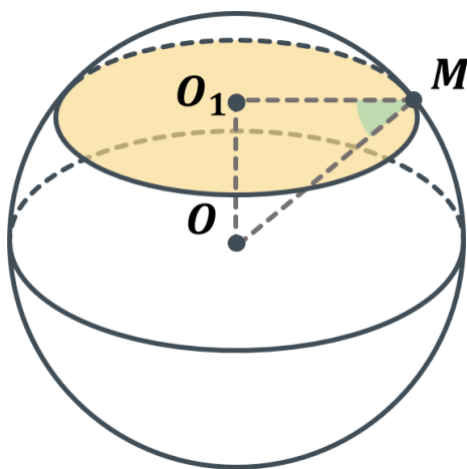
2

1

6

4

2. (1 б) Через точку, що належить сфері, побудовано переріз з радіусом 3 см під кутом 60° до радіуса сфери, побудованого до цієї точки. Знайдіть площу сфери і об'єм кулі.



Дано:

$O_1M = 3 \text{ см};$

$\angle OMO_1 = 60^\circ;$

Знайти:

$V_{\text{кулі}} - ?$

$S_{\text{кулі}} - ?$

Розв'язок:

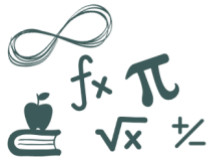
Розглянемо прямокутний $\triangle OO_1M$:

$$\left. \begin{array}{l} \angle OO_1M = 90^\circ \\ \angle OMO_1 = 60^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle MOO_1 = 30^\circ \Rightarrow O_1M = \frac{OM}{2} \Rightarrow OM = 2O_1M$$

$$OM = 2 \cdot 3 = 6 \text{ см}$$

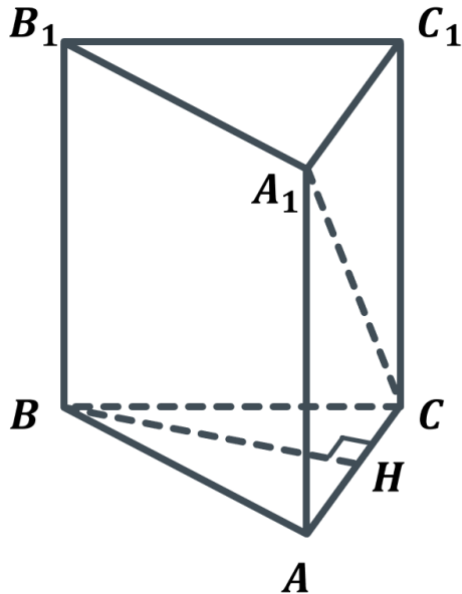
$$V_{\text{кулі}} = \frac{4}{3} \pi \cdot OM^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 6^3 = 288\pi \text{ см}^3$$

$$S_{\text{кулі}} = 4\pi \cdot OM^2 = 4\pi \cdot 6^2 = 144\pi \text{ см}^2$$



Відповідь: $V_{\text{кулі}} = 288\pi \text{ см}^3$; $S_{\text{кулі}} = 144\pi \text{ см}^2$

3. (2 б) Основа прямої призми – рівнобедрений трикутник з бічною стороною 5 см і висотою, побудованою до основи, – 4 см. Діагональ бічної грані, що містить основу трикутника, дорівнює 10 см. Знайдіть об'єм призми.



Дано:

$ABCA_1B_1C_1$ – пряма призма;

$AB = BC = 5 \text{ см}$;

$BH = 4 \text{ см}$;

$BH \perp AC$;

$A_1C = 10 \text{ см}$;

Знайти:

$V_{ABCA_1B_1C_1} - ?$

Розв'язок:

$\triangle ABC$ – рівнобедрений $\Rightarrow BH$ – висота, бісектриса і медіана $\Rightarrow AC = 2AH$

З прямокутного $\triangle BHA$:

$$AH = \sqrt{BA^2 - BH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3 \text{ см}$$

$$AC = 2AH = 2 \cdot 3 = 6 \text{ см}$$

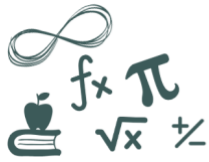
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12 \text{ см}^2$$

З прямокутного $\triangle A_1AC$:

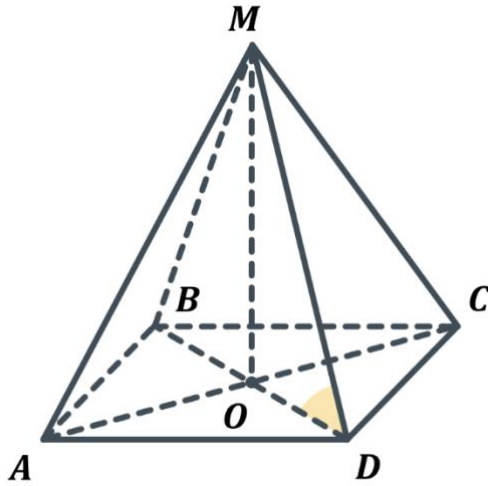
$$A_1A = \sqrt{A_1C^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8 \text{ см}$$

$$V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot A_1A = 12 \cdot 8 = 96 \text{ см}^3$$

Відповідь: 96 см^3



4. (3 б) Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює l і нахилене до площини основи від кутом α . Знайдіть об'єм піраміди.



Дано:

$MABCD$ – правильна чотирикутна піраміда;

$MD = l$;

$\angle MDO = \alpha$;

Знайти:

V_{MABCD} – ?

Розв'язок:

$MABCD$ – правильна чотирикутна піраміда $\Rightarrow ABCD$ – квадрат

Розглянемо прямокутний $\triangle MOD$:

$$\sin D = \frac{MO}{MD}$$

$$MO = \sin D \cdot MD = l \sin \alpha$$

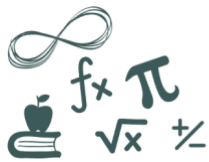
$$\begin{aligned} OD &= \sqrt{MD^2 - MO^2} = \sqrt{l^2 - (l \sin \alpha)^2} = \sqrt{l^2 - l^2 \sin^2 \alpha} \\ &= \sqrt{l^2(1 - \sin^2 \alpha)} = l \sqrt{\cos^2 \alpha} = l \cos \alpha \end{aligned}$$

$$BD = 2OD = 2l \cos \alpha$$

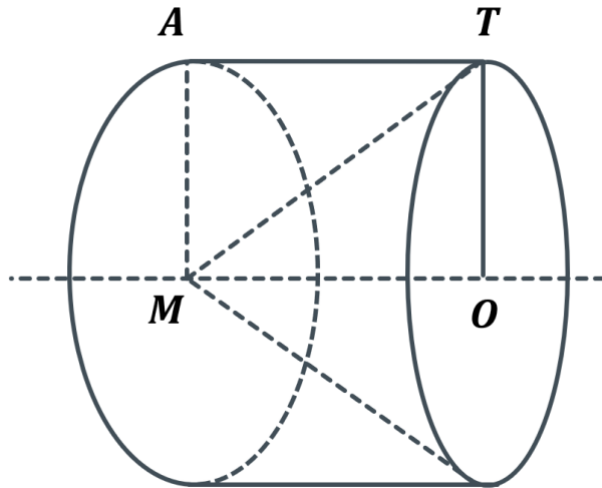
$$AD = \frac{BD}{\sqrt{2}} = \frac{2l \cos \alpha}{\sqrt{2}} = \frac{2l \cos \alpha \cdot \sqrt{2}}{2} = l \cos \alpha \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} V_{MABCD} &= \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot MO = \frac{AD^2 \cdot MO}{3} = \frac{(l \cos \alpha \sqrt{2})^2 \cdot l \sin \alpha}{3} \\ &= \frac{2l^2 \cos^2 \alpha \cdot l \sin \alpha}{3} = \frac{2}{3} l^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь: } \frac{2}{3} l^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha$$



5. (3 б) Прямокутний трикутник з катетом 8 см і площею 24 см^2 обертається навколо прямої, паралельної катету, що проходить через вершину більшого гострого кута трикутника. Знайдіть об'єм тіла обертання.



Дано:

$\triangle MAT$ – прямокутний;

$\angle MAT = 90^\circ$

$a = 8 \text{ см};$

$S_{MAT} = 24 \text{ см}^2;$

$\angle AMT$ – більший гострий кут;

Знайти:

$V_{\text{тіла}} - ?$

Розв'язок:

Об'єм утвореного тіла обертання складається з об'єму циліндра, від якого треба відняти об'єм конуса з такою самою висотою і радіусом основи.

Радіус основи циліндра дорівнює довжині катета, що є перпендикулярним осі обертання $\triangle MAT$. Висота циліндра дорівнює довжині катета, що є паралельним осі обертання $\triangle MAT$.

З прямокутного $\triangle MAT$:

$$\left. \begin{array}{l} S_{MAT} = 24 \text{ см}^2 \\ S_{MAT} = \frac{ab}{2} \\ a = 8 \text{ см} \end{array} \right| \Rightarrow \frac{ab}{2} = 24 \Rightarrow b = \frac{24 \cdot 2}{8} = 6 \text{ см}$$

Так як вісь обертання проходить через вершину більшого гострого кута трикутника, і в трикутнику навпроти більшого кута лежить більша сторона то $AT = 8 \text{ см}$, $AM = 6 \text{ см}$

Отже:

Висота циліндра і конуса дорівнює $AT = 8 \text{ см}$;

Радіус основи циліндра і конуса дорівнює $MA = 6 \text{ см}$;

$$\begin{aligned} V_{\text{тіла}} &= V_{\text{циліндра}} - V_{\text{конуса}} = \pi \cdot MA^2 \cdot AT - \frac{1}{3} \pi \cdot MA^2 \cdot AT \\ &= \pi \cdot 6^2 \cdot 8 - \frac{1}{3} \pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 288\pi - 96\pi = 192\pi \text{ см}^3 \end{aligned}$$

Відповідь: $192\pi \text{ см}^3$