

Тема: Розв'язування типових вправ

Мета:

- *Навчальна:* закріпити знання, отримані на попередніх уроках;
- *Розвиваюча:* розвивати просторову уяву;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук; наполегливість;

Компетенції:

- Спілкування державною мовою (уміння ставити запитання і розпізнавати проблему; міркувати, робити висновки на основі отриманої інформації)

Тип уроку: закріплення нових знань;

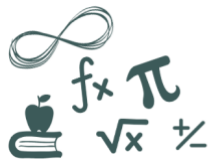
Обладнання: конспект, презентація, мультимедійне обладнання;

Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Перевірка виконання д/з
- Налаштування на роботу

II. Актуалізація опорних знань



III. Розв'язування задач

№1

Знайдіть висоту циліндра, об'єм якого дорівнює $98\pi \text{ см}^3$, а радіус основи – 7 см

Розв'язок:

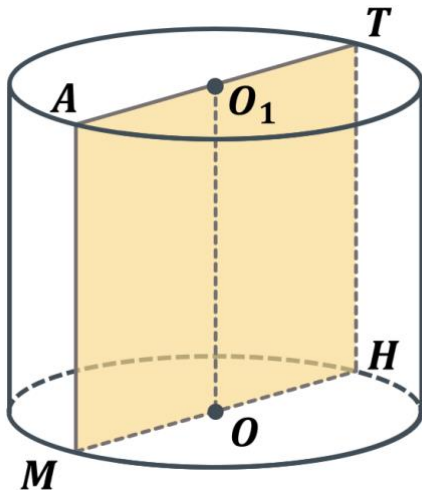
$$V = \pi r^2 h$$

$$98\pi = \pi \cdot 7^2 \cdot h$$

$$h = \frac{98\pi}{49\pi} = 2$$

№2

Висота циліндра дорівнює H , а осьовий переріз циліндра є квадратом. Знайдіть об'єм циліндра



Дано:

$$OO_1 = H;$$

$MATH$ – квадрат;

Знайти:

$$V - ?$$

Розв'язок:

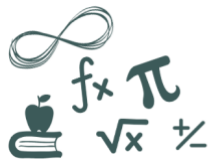
$MATH$ – квадрат, отже:

$$MA = AT = OO_1 = H$$

$$OH = \frac{MA}{2} = \frac{H}{2}$$

$$V = \pi \cdot OH^2 \cdot OO_1 = \pi \cdot \left(\frac{H}{2}\right)^2 \cdot H = \frac{\pi H^3}{4}$$

Відповідь: $\frac{\pi H^3}{4}$



Знайдіть висоту конуса, об'єм якого дорівнює $24\pi \text{ см}^3$, а радіус основи – 3 см

Розв'язок:

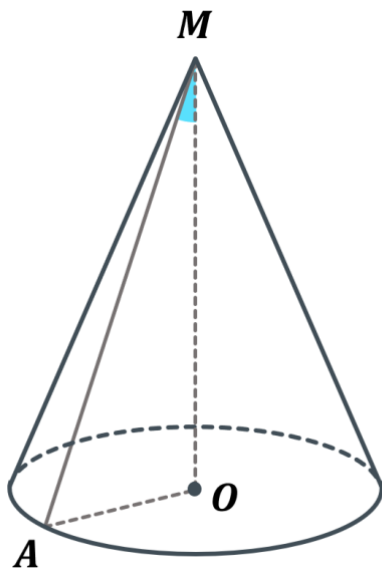
$$V_K = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$24\pi = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot h$$

$$h = 24\pi : \frac{9\pi}{3} = 24\pi \cdot \frac{1}{3\pi} = 8 \text{ см}$$

Відповідь: 8 см

Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 10 см, а один із кутів – 60° . Знайдіть об'єм тіла, отриманого в результаті обертання даного трикутника навколо прямої, яка містить катет, прилеглий до даного кута.



Дано:

$$MA = 10 \text{ см};$$

$$\angle MAO = 60^\circ;$$

Знайти:

$$V - ?$$

Розв'язок:

З прямокутного $\triangle MAO$:

$$\sin M = \frac{AO}{MA}$$

$$AO = \sin M \cdot MA = \sin 60^\circ \cdot 10$$

$$AO = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10 = 5\sqrt{3} \text{ см}$$

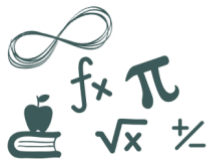
$$\cos M = \frac{MO}{MA}$$

$$MO = \cos M \cdot MA = \cos 60^\circ \cdot 10$$

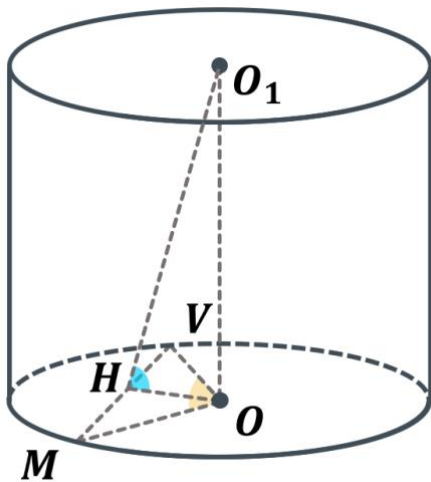
$$MO = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5 \text{ см}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot AO^2 \cdot MO = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (5\sqrt{3})^2 \cdot 5 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 75 \cdot 5 = 125\pi \text{ см}^3$$

Відповідь: $125\pi \text{ см}^3$



У нижній основі циліндра проведено хорду, що стягує дугу, градусна міра якої дорівнює α , $0^\circ < \alpha < 180^\circ$. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи із серединою даної хорди, утворює з площиною основи кут β . Знайдіть об'єм циліндра, якщо його висота дорівнює m .



Дано:

$$\angle MOV = \alpha;$$

$$\angle O_1HO = \beta;$$

$$O_1O = m;$$

Знайти:

$$V - ?$$

Розв'язок:

Розглянемо прямокутний $\triangle O_1OH$:

$$\operatorname{tg} H = \frac{O_1O}{HO}$$

$$HO = \frac{O_1O}{\operatorname{tg} H}$$

$$HO = \frac{m}{\operatorname{tg} \beta}$$

Розглянемо рівнобедрений $\triangle MOV$:

OH – висота, медіана і бісектриса, отже:

$$\angle VOH = \frac{\alpha}{2}$$

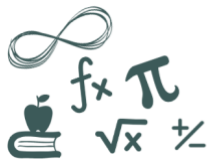
З прямокутного $\triangle VHO$:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{HO}{OV}$$

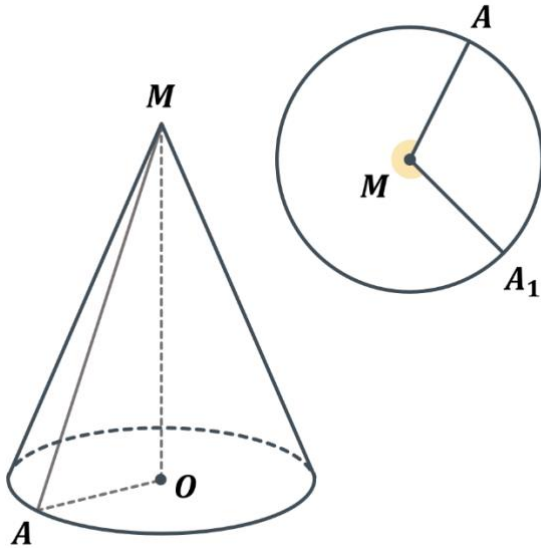
$$OV = \frac{HO}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{m}{\operatorname{tg} \beta} : \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{m}{\operatorname{tg} \beta} \cdot \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{m}{\operatorname{tg} \beta \cos \frac{\alpha}{2}}$$

$$V = \pi \cdot OV^2 \cdot O_1O = \pi \cdot \left(\frac{m}{\operatorname{tg} \beta \cos \frac{\alpha}{2}} \right)^2 \cdot m = \pi \cdot \frac{m^2}{\operatorname{tg}^2 \beta \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot m = \frac{\pi m^3}{\operatorname{tg}^2 \beta \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{Відповідь: } \frac{\pi m^3}{\operatorname{tg}^2 \beta \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$



Висота конуса дорівнює 8 см, а його об'єм - 96π см³. Обчисліть центральний кут розгортки бічної поверхні конуса.



Дано:

$$MO = 8 \text{ см};$$

$$V_k = 96\pi \text{ см}^3;$$

Знайти:

$$\angle AMA_1 - ?$$

Розв'язок:

$\angle AMA_1$ можна знайти використовуючи формулу площі сектора. Площа сектора дорівнює площі бічної поверхні конуса, отже:

$$S_{MAA_1} = S_{\text{б.конуса}}$$
$$\frac{\pi MA^2}{360^\circ} \cdot \alpha = \pi \cdot AO \cdot MA$$

$$\alpha = (\pi \cdot AO \cdot MA) : \frac{\pi MA^2}{360^\circ} = \pi \cdot AO \cdot MA \cdot \frac{360^\circ}{\pi MA^2} = \frac{AO \cdot 360^\circ}{MA}$$

Отже, знайдемо радіус основи AO і твірну MA :

$$V_k = \frac{1}{3} \pi \cdot AO^2 \cdot MO$$

$$96\pi = \frac{1}{3} \pi \cdot AO^2 \cdot 8$$

$$96\pi = \frac{8\pi \cdot AO^2}{3}$$

$$AO^2 = \frac{96\pi \cdot 3}{8\pi} = \frac{288\pi}{8\pi} = 36 \text{ см}$$

$$AO = 6 \text{ см}$$

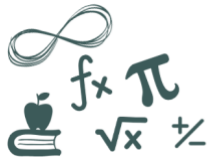
З прямокутного $\triangle MOA$:

$$MA = \sqrt{MO^2 + AO^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10 \text{ см}$$

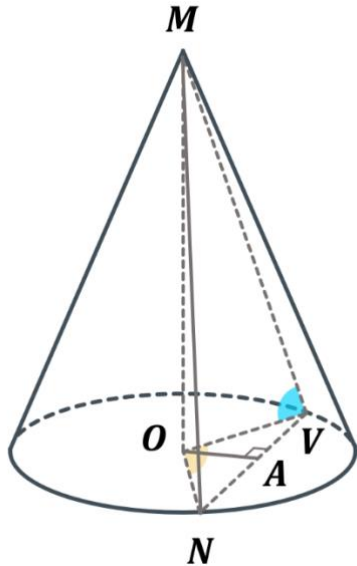
Тепер, коли нам відомі радіус основи і твірна, можемо повернутися до знаходження шуканого кута:

$$\alpha = \frac{AO \cdot 360^\circ}{MA} = \frac{6 \cdot 360^\circ}{10} = 216^\circ$$

Відповідь: 216°



В основі конуса хорда завдовжки a стягує дугу, градусна міра якої дорівнює α , $0^\circ < \alpha < 180^\circ$. Кут між твірною конуса та площиною його основи дорівнює β . Знайдіть об'єм конуса.



Дано:

$$NV = a;$$

$$\angle NOV = \alpha, 0^\circ < \alpha < 180^\circ;$$

$$\angle MVO = \beta;$$

Знайти:

$$V_{\text{к}} - ?$$

Розв'язок:

$\triangle NOV$ – рівнобедрений, висота рівнобедреного трикутника є одночасно його медіаною і бісектрисою, отже:

$$\angle AOV = \frac{\angle NOV}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

$$AV = \frac{NV}{2} = \frac{a}{2}$$

Розглянемо прямокутний $\triangle OAV$:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{AV}{OV}$$

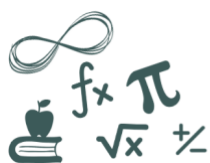
$$OV = AV : \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

Розглянемо прямокутний $\triangle MOV$:

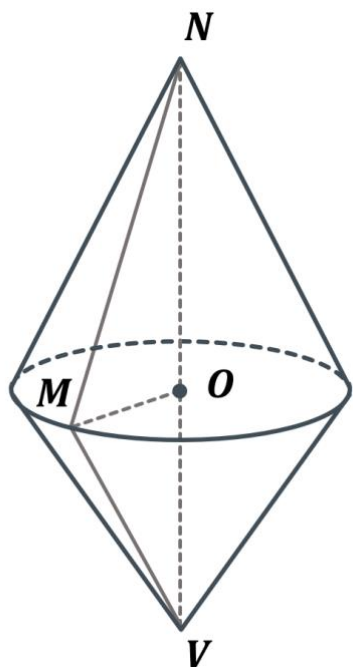
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{MO}{OV} \Rightarrow MO = OV \operatorname{tg} \beta = \frac{a \operatorname{tg} \beta}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\begin{aligned} V_{\text{к}} &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot OV^2 \cdot MO = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \right)^2 \cdot \frac{a \operatorname{tg} \beta}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{a \operatorname{tg} \beta}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{\pi a^3 \operatorname{tg} \beta}{24 \sin^3 \frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{\pi a^3 \operatorname{tg} \beta}{24 \sin^3 \frac{\alpha}{2}}$



Знайдіть об'єм тіла, отриманого в результаті обертання трикутника зі сторонами 10 см, 17 см і 21 см навколо прямої, яка містить його більшу сторону.



Дано:

$$MV = 10 \text{ см};$$

$$MN = 17 \text{ см};$$

$$NV = 21 \text{ см};$$

Знайти:

$$V_{\text{т.о.}} - ?$$

Розв'язок:

Знаючи площу $\triangle VMN$, можна знайти його висоту, яка є спільним радіусом двох утворених конусів. Знайдемо площу $\triangle VMN$ за формулою Герона:

$$S_{VMN} = \sqrt{p(p - MV)(p - MN)(p - NV)}$$
$$p = \frac{10 + 17 + 21}{2} = 24$$

$$S_{VMN} = \sqrt{24(24 - 10)(24 - 17)(24 - 21)} = \sqrt{24 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 3} = \sqrt{7056}$$
$$= 84 \text{ см}^2$$

$$S_{VMN} = \frac{VN \cdot MO}{2} \quad \left| \Rightarrow \frac{VN \cdot MO}{2} = 84 \Rightarrow MO = \frac{84 \cdot 2}{VN} = \frac{168}{21} = 8 \text{ см} \right.$$
$$S_{VMN} = 84 \text{ см}^2$$

З прямокутного $\triangle MON$:

$$ON = \sqrt{MN^2 - MO^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{289 - 64} = \sqrt{225} = 15 \text{ см}$$

З прямокутного $\triangle MOV$:

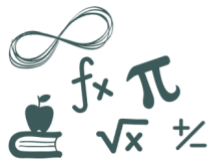
$$OV = \sqrt{MV^2 - MO^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6 \text{ см}$$

$$V_{\text{т.о.}} = V_{\text{к.1}} + V_{\text{к.2}}$$

$$V_{\text{к.1}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot MO^2 \cdot NO = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 8^2 \cdot 15 = \frac{960\pi}{3} = 320\pi \text{ см}^3$$

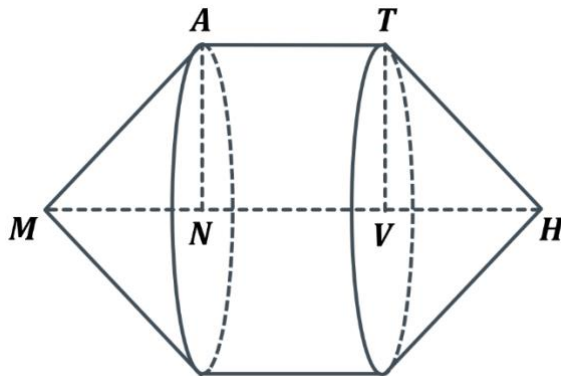
$$V_{\text{к.2}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot MO^2 \cdot OV = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 64 \cdot 6 = \frac{384\pi}{3} = 128\pi \text{ см}^3$$

$$V_{\text{т.о.}} = 320\pi + 128\pi = 448\pi \text{ см}^3$$

Відповідь: $448\pi \text{ см}^3$

№9

Рівнобічну трапецію з основами 1 см і 25 см обертають навколо прямої, що містить її більшу основу. Знайдіть об'єм отриманого тіла, якщо відомо, що в дану трапецію можна вписати коло.



Дано:

 $MATH$ – трапеція; $AT = 1 \text{ см};$ $MH = 25 \text{ см};$

Знайти:

 $V_{\text{т.о.}} - ?$

Розв'язок:

$$V_{\text{т.о.}} = 2V_{\text{к}} + V_{\text{ц}}$$

Так як в трапецію можна вписати коло, то:

$$MA + TH = AT + MH$$

Так як трапеція рівнобічна, то $MA = TH = x$, отже:

$$x + x = 1 + 25$$

$$2x = 26$$

$$x = 13$$

Отже, $MA = TH = 13 \text{ см}$ Трапеція $MATH$ – рівнобічна, отже:

$$MN = VH = \frac{MH - AT}{2} = \frac{25 - 1}{2} = 12 \text{ см}$$

$$NV = AT = 1 \text{ см}$$

З прямокутного $\triangle MNA$:

$$AN = \sqrt{MA^2 - MN^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5 \text{ см}$$

$$V_{\text{к}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot NA^2 \cdot MN = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 12 = \frac{300\pi}{3} = 100\pi \text{ см}^3$$

$$V_{\text{ц}} = \pi \cdot NA^2 \cdot NV = \pi \cdot 5^2 \cdot 1 = 25\pi \text{ см}^3$$

$$V_{\text{т.о.}} = 2V_{\text{к}} + V_{\text{ц}} = 2 \cdot 100\pi + 25\pi = 225\pi \text{ см}^3$$

Відповідь: $225\pi \text{ см}^3$

IV. Підсумок уроку

- Дати відповідь на запитання учнів
- Індивідуальна робота з учнями

V. Домашнє завдання

Повторити §6 п.23 (циліндр і конус) Виконати №23.6; 23.10; 23.15; 23.28; 23.31	Мерзляк А.Г.
Повторити §10 (циліндр і конус) Виконати №10.4; 10.8; 10.12; 10.16; 10.54	Істер О.С.
Повторити §10-11 (циліндр і конус) Виконати №10.18; 11.19; 11.20	Нелін Є.П.
Повторити §24-25 (циліндр і конус) Виконати №918; 933; 980	Бевз Г.П.