

Тема: Об'єми циліндра і конуса

Мета:

- *Навчальна:* навчити знаходити об'єм циліндра і конуса;
- *Розвиваюча:* розвивати просторову уяву; вміння будувати циліндр і конус, знаходити об'єм циліндра і конуса; вміння застосовувати отримані знання до розв'язування завдань; розвивати вміння розпізнавати циліндр і конус в об'єктах навколишнього світу;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук; наполегливість;

Компетенції:

- Спілкування державною мовою (уміння ставити запитання і розпізнавати проблему; міркувати, робити висновки на основі отриманої інформації)

Тип уроку: засвоєння нових знань;

Обладнання: конспект, презентація, мультимедійне обладнання;

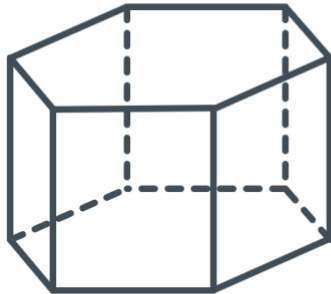
Хід уроку

I. Організаційний етап

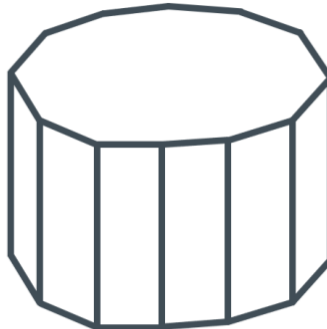
- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Перевірка виконання д/з
- Налаштування на роботу

II. Вивчення нового матеріалу

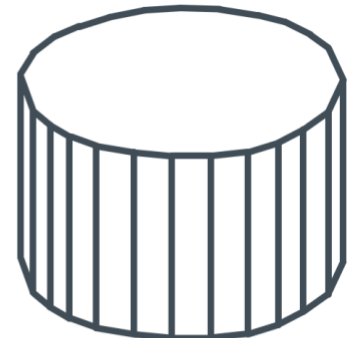
>> Об'єм циліндра <<



**6-кутна
правильна
призма**



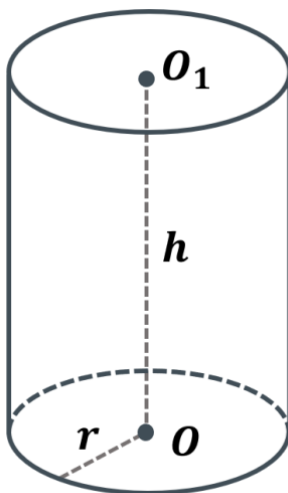
**12-кутна
правильна
призма**



**24-кутна
правильна
призма**

- Перед вами 6-кута, 12-кутна та 24-кутна правильні призми. Якщо кількість сторін основи правильної призми необмежено збільшувати – вона все більше стає схожою на циліндр. Що нам можуть підказати такі міркування?

(Об'єм циліндра, як і призми, дорівнює добутку площі його основи на висоту)

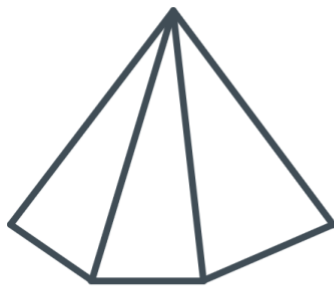
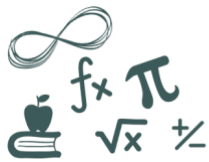


Об'єм циліндра дорівнює добутку площі його основи на висоту:

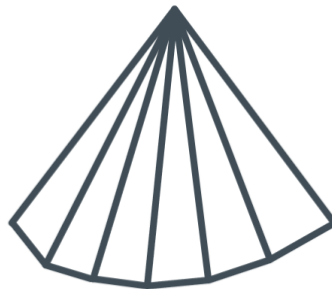
$$V = S_{\text{основи}} h$$

- Якщо в основі циліндра круг з радіусом r , як можемо записати формулу?

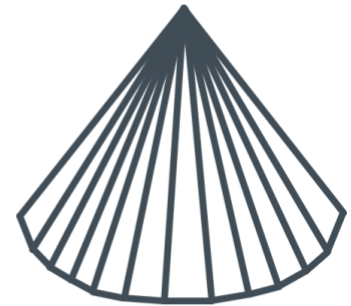
$$V = S_{\text{основи}} h = \pi r^2 h$$



**6-кутна
правильна
піраміда**



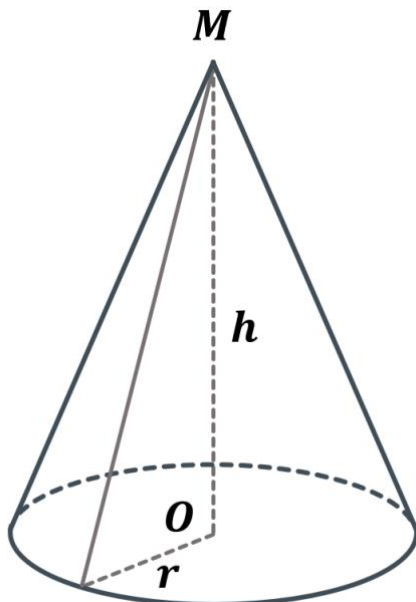
**12-кутна
правильна
піраміда**



**24-кутна
правильна
піраміда**

- Перед вами 6-кутна, 12-кутна та 24-кутна правильні піраміди. Якщо кількість сторін основи правильної піраміди необмежено збільшувати – вона все більше стає схожою на конус. Що нам можуть підказати такі міркування?

(Об'єм конуса, як і піраміди, дорівнює добутку площі його основи на висоту)



Об'єм конуса дорівнює третині добутку площі його основи на висоту:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{основи}} h$$

- Якщо в основі конуса круг з радіусом r , як можемо записати формулу?

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{основи}} h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

**Наші міркування стосовно об'єму циліндра і конуса не є доведенням цих формул. Доведення цих формул є досить громіздким для відведених кількості годин на рівень стандарту, тому в такому випадку краще розв'язувати більше задач.*

III. Закріплення нових знань та вмінь учнів

№1

Знайдіть об'єм циліндра, радіус основи якого дорівнює 4 см, а висота – 5 см.

Розв'язок:

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 4^2 \cdot 5 = 80\pi \text{ см}^3$$

Відповідь: $80\pi \text{ см}^3$

№2

Знайдіть об'єм тіла, отриманого в результаті обертання прямокутника зі сторонами a і b навколо прямої, яка містить його сторону, що дорівнює b

Розв'язок:

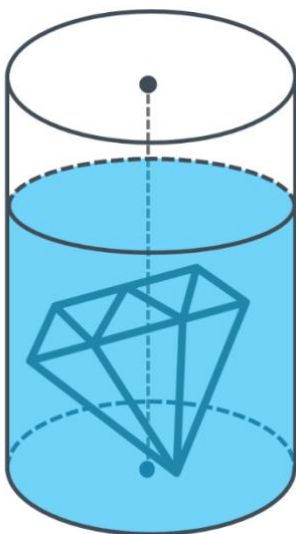
Тіло утворене внаслідок обертання навколо осі, що містить сторону b , отже b – висота, a – радіус.

$$V = \pi a^2 b$$

Відповідь: $\pi a^2 b$

№3

У циліндричну посудину, наповнену водою, занурили металеву деталь. При цьому виявилось, що деталь повністю покрито водою. Рівень води в посудині піднявся на 14 см, не досягнувши краю посудини. Знайдіть об'єм деталі, якщо внутрішній діаметр посудини дорівнює 20 см



Розв'язок:

Діаметр основи 20 см $\Rightarrow r = 10$ см;

Вода піднялася на 14 см $\Rightarrow h = 14$ см;

$$V = \pi \cdot 10 \cdot 14 = 1400\pi \text{ см}^3$$

Відповідь: $1400\pi \text{ см}^3$

Знайдіть об'єм конуса, радіус основи якого дорівнює 6 см, а висота – 5 см.

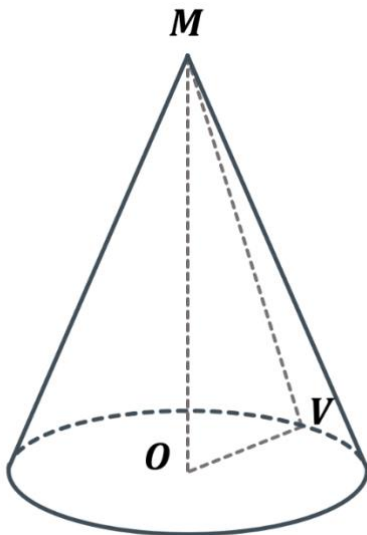
Розв'язок:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 5 = 60\pi \text{ см}^3$$

Відповідь: $60\pi \text{ см}^3$

№5

Купа щебня має форму конуса, радіус основи якого 2,1 м, а твірна – 3,5 м. Скільки тонн становить маса щебня, зібраного в цю купу, якщо маса 1 м^3 щебня дорівнює 3 т? Відповідь округліть до одиниць.



Дано:

$$OV = 2,1 \text{ м};$$

$$MV = 3,5 \text{ м};$$

$$m_1 = 3 \text{ т};$$

Знайти:

$$m - ?$$

Розв'язок:

З прямокутного $\triangle MOV$:

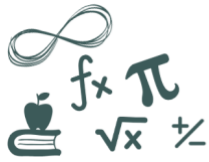
$$\begin{aligned}
 MO &= \sqrt{MV^2 - OV^2} = \sqrt{3,5^2 - 2,1^2} \\
 &= \sqrt{12,25 - 4,41} = \sqrt{7,84} \\
 &= 2,8 \text{ м}
 \end{aligned}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot OV^2 \cdot MO = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2,1^2 \cdot 2,8 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4,41 \cdot 2,8 \approx 12,9 \text{ м}^3$$

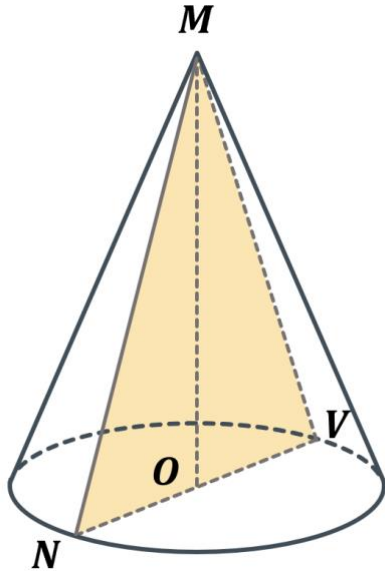
Кожен кубічний метр має вагу 3 т, отже:

$$m = 12,9 \cdot 3 \approx 39 \text{ т}$$

Відповідь: 39 т



Осьовий переріз конуса є рівностороннім трикутником, а радіус основи конуса дорівнює R . Знайдіть об'єм конуса.



Дано:

$\triangle MNV$ – рівносторонній;

$ON = R$;

Знайти:

V – ?

Розв'язок:

Так як $\triangle MNV$ – рівносторонній, то:

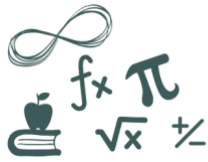
$$MN = MV = NO = 2R$$

Розглянемо прямокутний $\triangle MON$:

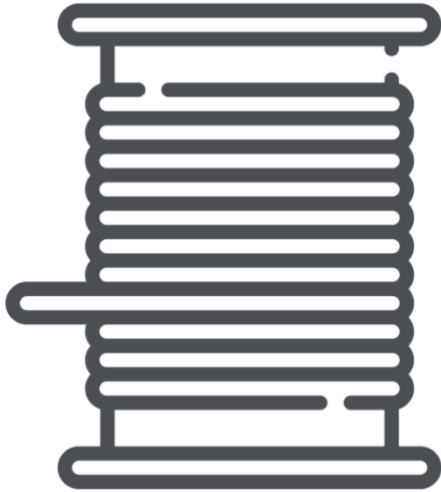
$$\begin{aligned} MO &= \sqrt{MV^2 - OV^2} = \sqrt{(2R)^2 - R^2} \\ &= \sqrt{4R^2 - R^2} = \sqrt{3R^2} \\ &= R\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot OV^2 \cdot MO = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot R\sqrt{3} = \frac{\pi R^3 \sqrt{3}}{3}$$

Відповідь: $\frac{\pi R^3 \sqrt{3}}{3}$



Алюмінієвий дріт діаметром 10 мм має масу 16,3 кг. Густина алюмінію дорівнює 2600 кг/м^3 . Скільки метрів становить довжина дроту? Відповідь округліть до одиниць.



Дано:

$$d = 10 \text{ мм};$$

$$m = 16,3 \text{ кг};$$

$$\rho = 2600 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$$

Знайти:

$$l - ?$$

Розв'язок:

Дріт має форму циліндра, отже нам необхідно знайти його висоту.

$$r = \frac{d}{2}$$

З курсу фізики пам'ятаємо, що:

$$V = \frac{m}{\rho}$$

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}$$

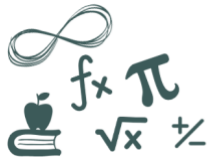
$$h = \frac{V}{\pi r^2} \left| \begin{array}{l} V = \frac{m}{\rho} \\ \Rightarrow h = \frac{m}{\rho} : \pi r^2 = \frac{m}{\rho} \cdot \frac{1}{\pi r^2} = \frac{m}{\rho \pi r^2} \end{array} \right.$$

Діаметр подано в міліметрах, отже переведемо міліметри в метри:

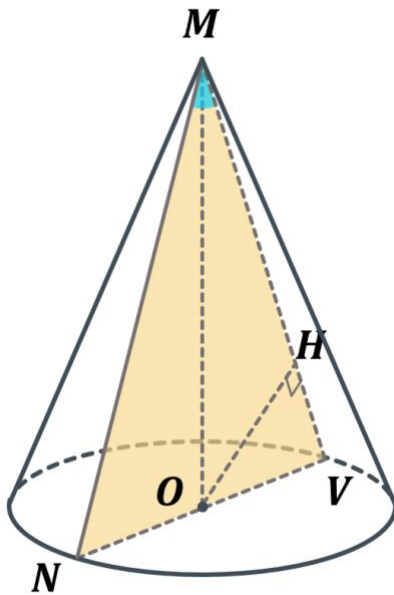
$$r = \frac{d}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ мм} = 0,005 \text{ м}$$

$$h = \frac{m}{\rho \pi r^2} = \frac{16,3}{2600 \cdot 3,14 \cdot 0,005^2} = \frac{16,3}{2600 \cdot 3,14 \cdot 0,000025} = \frac{16,3}{0,2041} \approx 80$$

Відповідь: 80 м



Кут в осьовому перерізі конуса при його вершині дорівнює α , а відстань від центра основи конуса до твірної дорівнює m . Знайдіть об'єм конуса.



Дано:

$$\angle NMV = \alpha;$$

$$OH \perp MV;$$

$$OH = m;$$

Знайти:

$$V - ?$$

Розв'язок:

В осьовому перерізі конуса отримуємо рівнобедрений трикутник. У рівнобедреному трикутнику висота є одночасно медіаною і бісектрисою, отже:

$$\angle OMV = \frac{\angle NMV}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

З прямокутного $\triangle MHO$:

$$\sin M = \frac{OH}{MO}$$

$$MO = \frac{OH}{\sin M} = \frac{m}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle O = 90^\circ \\ \angle M = \frac{\alpha}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle V = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

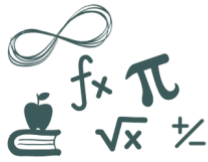
З прямокутного $\triangle OHV$:

$$\sin V = \frac{OH}{OV}$$

$$OV = \frac{OH}{\sin V} = \frac{m}{\sin \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

Так як $\sin \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos \frac{\alpha}{2}$, то:

$$OV = \frac{m}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

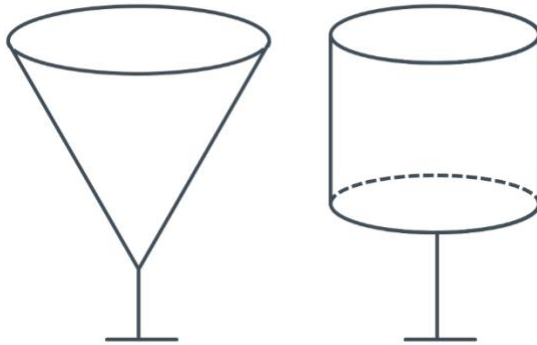


$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot OV^2 \cdot MO = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{m^2}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{m}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{m^3 \pi}{3 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}$$

Відповідь: $\frac{m^3 \pi}{3 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}$

№9

Із посудини, що має форму конуса з висотою 8 см і діаметром основи 12 см, наповненої до країв водою, перелили воду в посудину, що має форму циліндра. Діаметр основи циліндра дорівнює 8 см. Якою має бути найменша висота циліндричної посудини, щоб вода з неї не вилитася?

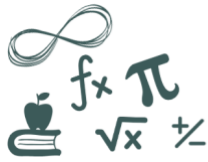


Розв'язок:

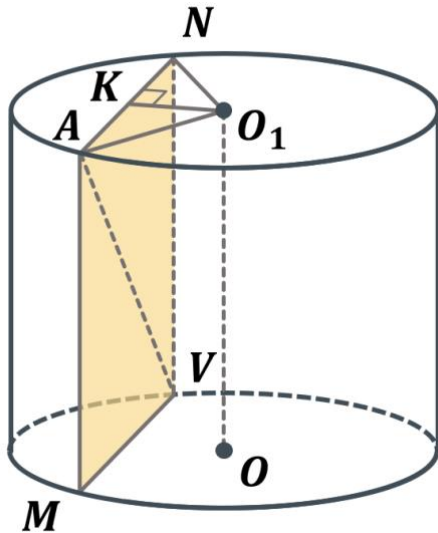
$$\begin{aligned} V_{\text{конуса}} &= V_{\text{циліндра}} \\ V_{\text{конуса}} &= \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 6^2 \cdot 8 \\ &= \frac{288\pi}{3} = 96\pi \text{ см}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{\text{циліндра}} &= \pi r^2 h \\ \pi r^2 h &= 96\pi \\ \pi \cdot 4^2 \cdot h &= 96\pi \\ 16\pi h &= 96\pi \\ h &= \frac{96\pi}{16\pi} = 6 \text{ см} \end{aligned}$$

Відповідь: 6 см



Паралельно осі циліндра проведено переріз, відстань від площини якого до осі циліндра дорівнює 12 см. Діагональ перерізу дорівнює $10\sqrt{5}$ см, а радіус основи циліндра – 13 см. Знайдіть об'єм циліндра.



Дано:

$$MANV \parallel OO_1;$$

$$AN \perp KO_1;$$

$$KO_1 = 12 \text{ см};$$

$$AV = 10\sqrt{5} \text{ см};$$

$$O_1A = 13 \text{ см};$$

Знайти:

$$V - ?$$

Розв'язок:

ΔO_1AN – рівнобедрений, отже O_1K – висота, медіана і бісектриса. Отже:
 $AN = 2AK$

Розглянемо прямокутний ΔO_1KA :

$$AK = \sqrt{AO_1^2 - KO_1^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5 \text{ см}$$

Отже, $AN = 2AK = 2 \cdot 5 = 10 \text{ см}$

Розглянемо прямокутний ΔANV :

$$NV = \sqrt{AV^2 - AN^2} = \sqrt{(10\sqrt{5})^2 - 10^2} = \sqrt{500 - 100} = \sqrt{400} = 20 \text{ см}$$

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 13^2 \cdot 20 = \pi \cdot 169 \cdot 20 = 3380\pi \text{ см}^3$$

Відповідь: $3380\pi \text{ см}^3$

IV. Підсумок уроку

- Якщо келехи мають однакову висоту, який келих вмістить в собі більший об'єм – той, що має форму циліндра чи той, що має форму конуса?
- Як обчислити об'єм циліндра?
- Як обчислити об'єм конуса?
- Як можна наочно переконатися, що об'єм конуса дорівнює третині добутку площі її основи на висоту?

(Ми вже знаємо, що об'єм циліндра дорівнює добутку площі його основи на висоту. Можна взяти конус і циліндр з однаковою висотою і основами, потім перелити воду з конуса в циліндр – наочно видно, що в такому циліндрі вміститься три об'єми конуса)

V. Домашнє завдання

Опрацювати §6 п.23 (циліндр і конус) Виконати №23.3; 23.13; 23.26; 23.33; 23.42	Мерзляк А.Г.
Опрацювати §10 (циліндр і конус) Виконати №10.2; 10.6; 10.10; 10.18; 10.38	Істер О.С.
Опрацювати §10-11 (циліндр і конус) Виконати №10.7; 10.17; 11.18; 11.24;	Нелін Є.П.
Опрацювати §24-25 (циліндр і конус) Виконати №898; 915; 919; 945; 963	Бевз Г.П.