

Тема: Об'єм піраміди

Мета:

- *Навчальна:* навчити знаходити об'єм піраміди;
- *Розвиваюча:* розвивати просторову уяву; вміння будувати піраміду, знаходити об'єм піраміди; вміння застосовувати отримані знання до розв'язування завдань; розвивати вміння розпізнавати піраміду в об'єктах навколишнього світу;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук; наполегливість;

Компетенції:

- Спілкування державною мовою (уміння ставити запитання і розпізнавати проблему; міркувати, робити висновки на основі отриманої інформації)

Тип уроку: засвоєння нових знань;

Обладнання: конспект, презентація, мультимедійне обладнання;

Хід уроку

I. Організаційний етап

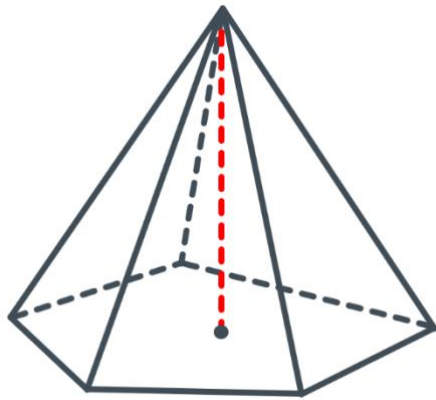
- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Перевірка виконання д/з
- Налаштування на роботу

II. Актуалізація опорних знань

- Чи може об'єм бути від'ємним?
- Що означає виміряти об'єм многогранника?
- Як знайти об'єм прямокутного паралелепіпеда?
- Як знайти об'єм призми?
- Сформулюйте основні властивості об'ємів
- У яких одиницях вимірюють об'єми?

III. Вивчення нового матеріалу

>> Об'єм піраміди <<

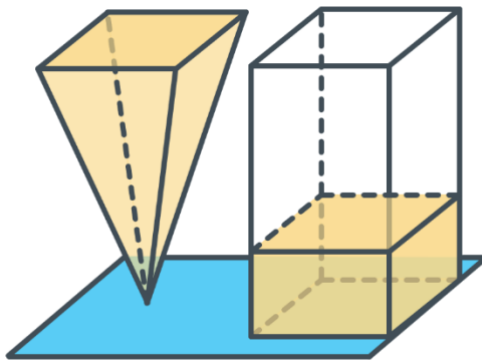


Об'єм піраміди дорівнює третині добутку площі її основи на висоту:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{основи}} h$$

**Доведення цієї теореми досить громіздке, тому за рівнем стандарту цей час краще витратити на розв'язування завдань.*

- Як переконатися у правильності цієї формули?



Ми вже знаємо, що об'єм призми дорівнює добутку площі її основи на висоту.

Можна взяти піраміду і призму з однаковою висотою і основами, потім перелити воду з піраміди в призму – наочно видно, що в такій призмі вміститься три об'єми піраміди.

IV. Закріплення нових знань та вмінь учнів

№1

Знайдіть об'єм піраміди:

- 1) Основою якої є квадрат зі стороною 2 см, а висота піраміди дорівнює 2 см;
- 2) Основою якої є ромб з діагоналями 2 см і 3 см, а висота піраміди дорівнює 10 см;
- 3) Основою якої є трикутник зі сторонами 6 см і 9 см та кутом 30° між ними, а висота піраміди дорівнює 12 см;

Розв'язок:

$$1) V = \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot 2 = \frac{8}{3} \text{ см}^3$$

$$2) V = \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 3}{2} \cdot 10 = 10 \text{ см}^3$$

$$3) V = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 9 \cdot \sin 30^\circ}{2} \cdot 12 = 54 \text{ см}^3$$

№2

Знайдіть висоту піраміди, об'єм якої дорівнює 20 см^3 , а площа основи – 15 см^2

Розв'язок:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{основи}} h$$

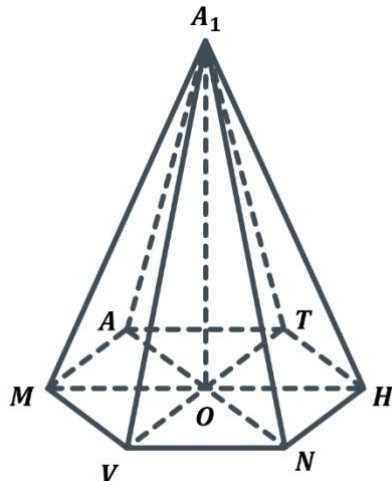
$$20 = \frac{1}{3} \cdot 15 \cdot h$$

$$h = \frac{20 \cdot 3}{15} = 4 \text{ см}$$

Відповідь: 4 см

№3

Сторона основи правильної шестикутної піраміди дорівнює 5 см, а бічне ребро – 13 см. Знайдіть об'єм піраміди.



Дано:

$MATHNOVA_1$ – правильна шестикутна піраміда;

$MA = 5 \text{ см};$

$A_1M = 13 \text{ см};$

Знайти:

$V - ?$

Розв'язок:

Так як піраміда правильна – в основі правильний багатокутник.

Правильний шестикутник можна поділити на 6 правильних трикутників зі стороною, що дорівнює стороні цього шестикутника, отже:

$$S_{\text{основи}} = 6 \cdot \frac{5^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

Розглянемо прямокутний $\triangle MOA_1$:

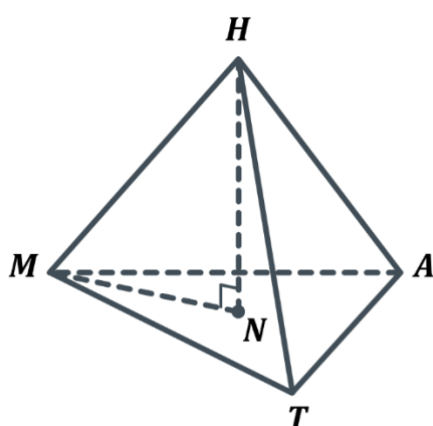
$$A_1O = \sqrt{MA_1^2 - MO^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \text{ см}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{25\sqrt{3}}{4} \cdot 12 = 12 \cdot \frac{25\sqrt{3}}{2} = 150\sqrt{3} \text{ см}^3$$

Відповідь: $150\sqrt{3} \text{ см}^3$

№4

Знайдіть об'єм правильного тетраедра, ребро якого дорівнює a



Дано:

$MATHN$ – правильний тетраедр;

$MA = a$;

Знайти:

V – ?

Розв'язок:

В основі правильного тетраедра – правильний трикутник, отже площа основи:

$$S_{\text{основи}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Радіус кола, описаного навколо рівностороннього трикутника:

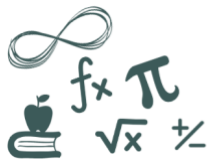
$$MN = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Розглянемо прямокутний $\triangle MHN$:

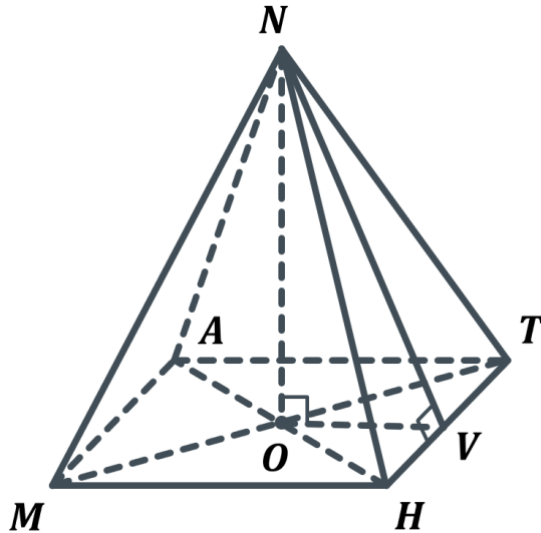
$$\begin{aligned}
 HN &= \sqrt{MH^2 - MN^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \sqrt{a^2 \left(1 - \frac{1}{3}\right)} = a \sqrt{\frac{2}{3}} \\
 &= \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Відповідь: $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$



Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см, а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює 60° . Знайдіть об'єм піраміди.



Дано:

$MATHN$ – правильна чотирикутна піраміда;

$MA = 4$ см;

$\angle NVO = 60^\circ$;

Знайти:

V – ?

Розв'язок:

$MATHN$ – правильна чотирикутна піраміда $\Rightarrow MATH$ – квадрат;

$S_{MATH} = MA^2 = 4^2 = 16$ см²

$$OV = \frac{AT}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ см}$$

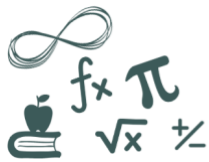
Розглянемо прямокутний $\triangle NOV$:

$$\operatorname{tg} V = \frac{NO}{OV}$$

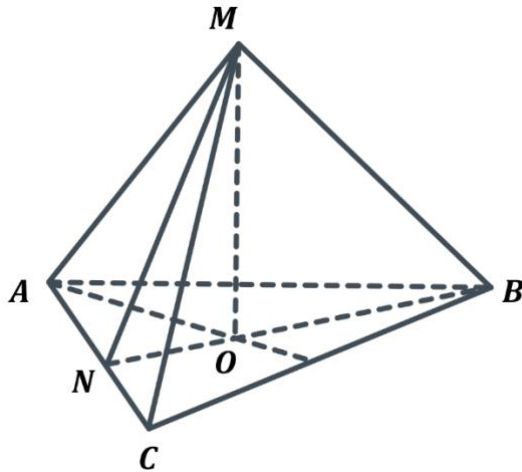
$$NO = \operatorname{tg} V \cdot OV = \operatorname{tg} 60^\circ \cdot 2 = 2\sqrt{3} \text{ см}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 2\sqrt{3} = \frac{32\sqrt{3}}{3} \text{ см}^3$$

Відповідь: $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ см³



Основою піраміди є трикутник зі сторонами $3\sqrt{10}$ см, $3\sqrt{10}$ см і 6 см. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює 13 см. Знайдіть об'єм піраміди.



Дано:

$$AB = BC = 3\sqrt{10} \text{ см};$$

$$AC = 6 \text{ см};$$

$$MA = MC = MB = 13 \text{ см};$$

Знайти:

$$V - ?$$

Розв'язок:

Якщо бічні ребра піраміди рівні або бічні ребра утворюють рівні кути з площиною основи, то проекцією вершини піраміди на площину основи є центр описаного кола многокутника, який є основою піраміди.

Радіус описаного навколо трикутника кола можна знайти за формулою:

$$AO = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{ABC}}$$

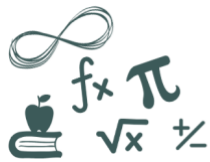
Знайдемо площу $\triangle ABC$:

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - AC)}$$

$$p = \frac{2AB + AC}{2} = \frac{2 \cdot 3\sqrt{10} + 6}{2} = \frac{6\sqrt{10} + 6}{2} = 3\sqrt{10} + 3$$

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \sqrt{3\sqrt{10} + 3(3\sqrt{10} + 3 - 3\sqrt{10})(3\sqrt{10} + 3 - 3\sqrt{10})(3\sqrt{10} + 3 - 6)} \\ &= \sqrt{(3\sqrt{10} + 3) \cdot 3 \cdot 3 \cdot (3\sqrt{10} - 3)} \\ &= \sqrt{9(3\sqrt{10} + 3)(3\sqrt{10} - 3)} = \sqrt{9((3\sqrt{10})^2 - 3^2)} \\ &= \sqrt{9(90 - 9)} = \sqrt{9 \cdot 81} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{81} = 3 \cdot 9 = 27 \text{ см}^2 \end{aligned}$$

$$AO = \frac{3\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{10} \cdot 6}{4 \cdot 27} = \frac{90 \cdot 6}{108} = 5 \text{ см}$$



Розглянемо прямокутний $\triangle AOM$:

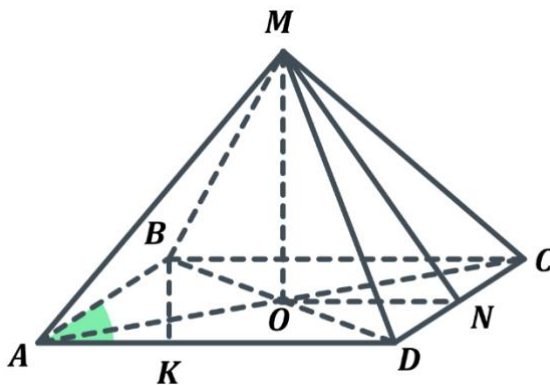
$$MO = \sqrt{AM^2 - AO^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \text{ см}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot MO = \frac{1}{3} \cdot 27 \cdot 12 = 9 \cdot 12 = 108 \text{ см}^3$$

Відповідь: 108 см^3

№7

Основою піраміди є ромб зі стороною a та кутом α . Двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють β . Знайдіть об'єм піраміди.



Дано:

$ABCD$ – ромб;

$AB = a$;

$\angle BAD = \alpha$;

$\angle MNO = \beta$;

Знайти:

V – ?

Розв'язок:

Якщо всі двогранні кути опуклої піраміди при ребрах основи рівні, то проекцією вершини піраміди на площину основи є центр вписаного кола многокутника, який є основою. Радіус вписаного кола в ромб дорівнює половині висоти ромба, отже:

$$OM = \frac{BK}{2}$$

Розглянемо прямокутний $\triangle AKB$:

$$\sin A = \frac{BK}{AB}$$

$$BK = \sin A \cdot AB = a \sin \alpha$$

$$ON = \frac{BK}{2} = \frac{a \sin \alpha}{2}$$

Розглянемо прямокутний $\triangle MON$:

$$\operatorname{tg} N = \frac{MO}{ON}$$

$$MO = \operatorname{tg} N \cdot ON = \operatorname{tg} \beta \cdot \frac{a \sin \alpha}{2}$$

Площу ромба можна знайти через сторону і синус будь-якого кута, отже:

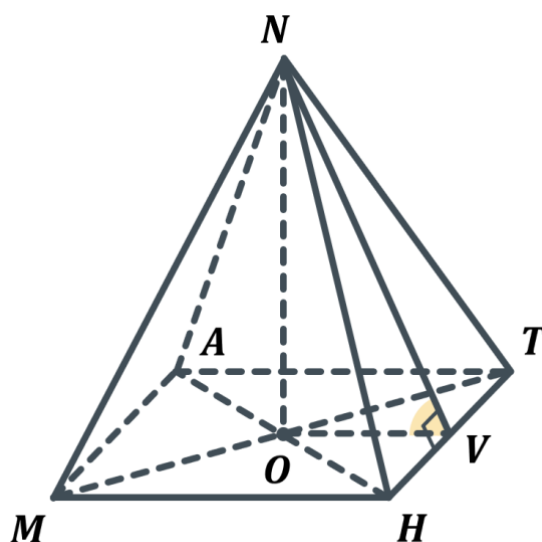
$$S_{ABCD} = AB^2 \cdot \sin A = a^2 \sin \alpha$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot MO = \frac{1}{3} \cdot a^2 \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \frac{a \sin \alpha}{2} = \frac{1}{6} a^3 \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \beta$$

Відповідь: $\frac{1}{6} a^3 \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \beta$

№8

Апофема правильної чотирикутної піраміди дорівнює $2\sqrt{3}$ см і нахилена під кутом 60° до площини основи. Знайдіть об'єм піраміди.



Дано:

$$NV = 2\sqrt{3} \text{ см};$$

$$\angle NVO = 60^\circ;$$

Знайти:

$$V - ?$$

Розв'язок:

Розглянемо прямокутний $\triangle NOV$:

$$\cos V = \frac{OV}{NV}$$

$$OV = \cos V \cdot NV$$

$$OV = \cos 60^\circ \cdot 2\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{3} \text{ см}$$

$$\sin V = \frac{NO}{NV}$$

$$NO = \sin V \cdot NV$$

$$NO = \sin 60^\circ \cdot 2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 3 \text{ см}$$

Основа правильної піраміди – правильний многокутник, тому $MATH$ – квадрат, отже:

$$MA = 2OV = 2\sqrt{3} \text{ см}$$

$$S_{MATH} = MA^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12 \text{ см}^2$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{МАТН}} \cdot NO = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 3 = 12 \text{ см}^3$$

Відповідь: 12 см^3

V. Підсумок уроку

- Чи правильно, що піраміди, які мають однакові висоти і однакові площі основ, мають однакові об'єми?
- Як знайти об'єм n -кутної піраміди?
- Як наочно можна переконатися у правильності формули для знаходження об'єму піраміди?
- Чи може піраміда мати від'ємний об'єм?
- Купуючи томатну пасту, в якому випадку ви більше платите за упаковку – упаковка «пірамідка» чи «циліндр»?

VI. Домашнє завдання

Опрацювати §6 п.22 Виконати № 22.15; 22.29; 22.38	Мерзляк А.Г.
Опрацювати §9 Виконати №9.2; 9.6; 9.10; 9.14	Істер О.С.
Опрацювати §11 (піраміда) Виконати №11.6; 11.8; 11.10; 11.12	Нелін Є.П.
Опрацювати §22 (піраміда) Виконати №949; 952; 955; 977	Бевз Г.П.