

Тема: Куля і сфера. Переріз кулі площиною

Мета:

- *Навчальна:* засвоїти поняття кулі та сфери, розглянути елементи кулі та сфери; засвоїти поняття перерізу кулі та сфери, можливі випадки розташування кулі та сфери і площини в просторі;
- *Розвиваюча:* розвивати просторову уяву; вміння розпізнавати елементи кулі та сфери; вміння будувати кулю та сферу, знаходити площу перерізу кулі; вміння застосовувати отримані знання до розв'язування завдань; розвивати вміння розпізнавати кулю та сферу в об'єктах навколишнього світу;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук; наполегливість;

Компетенції:

- Спілкування державною мовою (уміння ставити запитання і розпізнавати проблему; міркувати, робити висновки на основі отриманої інформації)

Тип уроку: засвоєння нових знань;

Обладнання: конспект, презентація, мультимедійне обладнання;

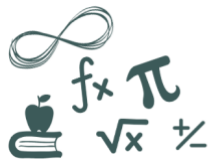
Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Перевірка виконання д/з
- Налаштування на роботу

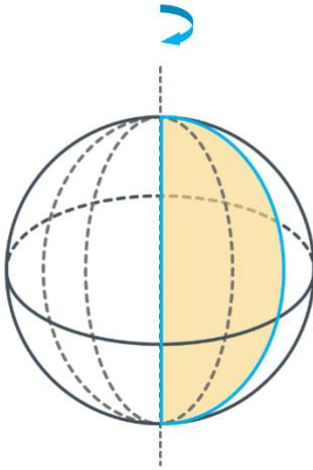
II. Актуалізація опорних знань

- Що ми називаємо геометричним тілом?
- Що не може бути тілом?
- Що ми називаємо дотичною до кола?
- Яку ви знаєте властивість дотичної до кола?
- Сформулюйте означення кола
- Сформулюйте означення круга



III. Вивчення нового матеріалу

>> Куля і сфера <<

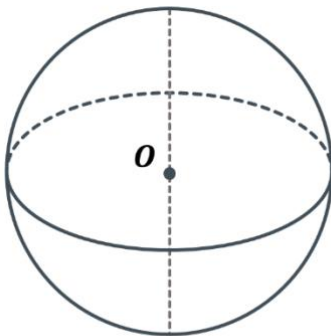
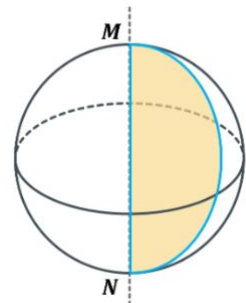


Куля - геометричне тіло, утворене обертанням півкруга навколо прямої, яка містить його діаметр.

Сфера – поверхня кулі.

**Нехай півколо обертається навколо прямої MN , тоді:*

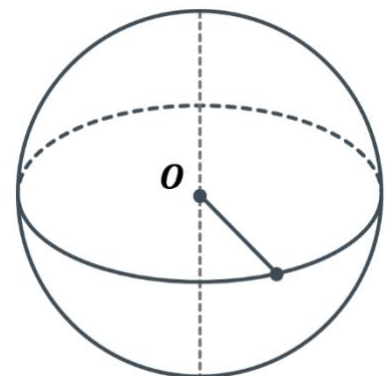
**Використовуючи подвійне означення до кулі, мається на увазі сфера, що є поверхнею кулі, її ще називають границею кулі.*

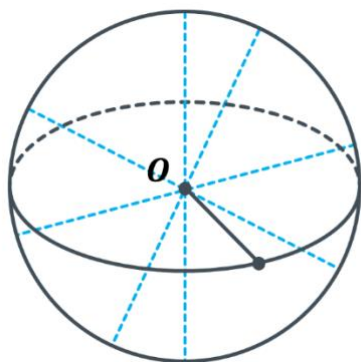
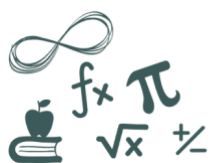


Центр сфери і кулі – середина відрізка MN

Радіус сфери (кулі) - відрізок, що сполучає точку сфери і центр сфери (кулі).

- Чому всі радіуси сфери є рівними?
(Усі точки сфери рівновіддалені від її центра)

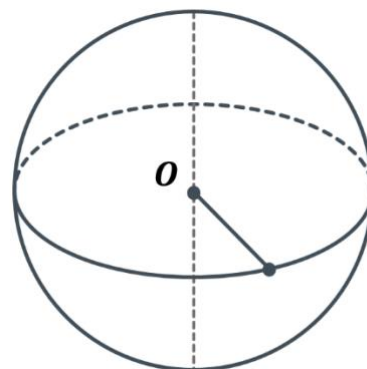




Діаметр сфери (кулі) – відрізок, що сполучає дві точки сфери і проходить через її центр

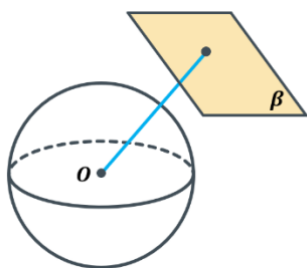
Діаметр сфери (кулі) дорівнює двом радіусам сфери (кулі).

- Що можемо сказати про відстань від будь-якої точки кулі до її центра?
(Так як куля є геометричним тілом, то ця відстань не може бути більшою за її радіус)



>> Взаємне розміщення сфери (кулі) і площини <<

Нехай l – відстань від центра кулі до площини (тобто l – це довжина перпендикуляра, що проведена з центра кулі(точка O) до площини α), а радіус кулі – r .

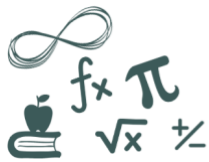


1) $l > r$

Площина і сфера (куля) не мають спільних точок

$$l > r$$

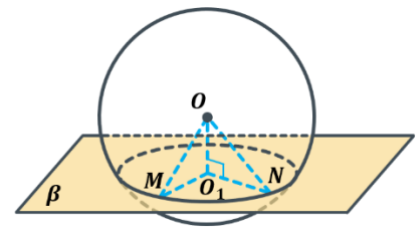
Не мають
спільних
точок



2) $l < r$

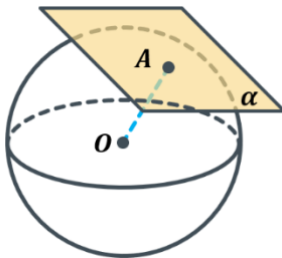
Площина і сфера (куля) мають безліч спільних точок

- Що отримаємо в перерізі сфери?
(Перерізом сфери площиною є коло)
- Що отримаємо в перерізі кулі?
(Куля – геометричне тіло, тому отримаємо круг)



$$l < r$$

**Переріз сфери – коло;
Переріз кулі – круг**



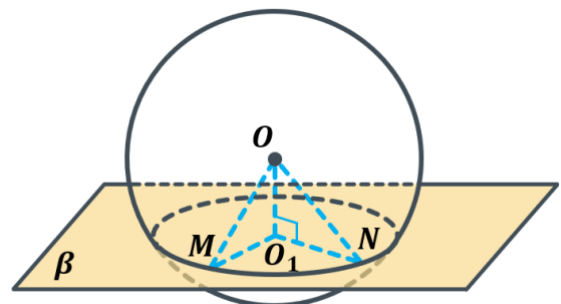
3) $l = r$

Площина і сфера (куля) мають одну спільну точку.

$$l = r$$

**Мають одну
спільну точку**

- Де знаходиться центр кола (круга), що утворюється внаслідок перерізу сфери (кулі) січною площиною?
(Центр кола (круга) є основою перпендикуляра, проведеного з центра кулі на січну площину.)

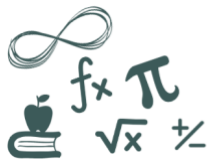


**Це твердження легко довести використовуючи теорему Піфагора)*



Творче д/з

Спробуйте довести, що центр цього кола (кола) є основою перпендикуляра, проведеного з центра кулі (сфери) на січну площину.

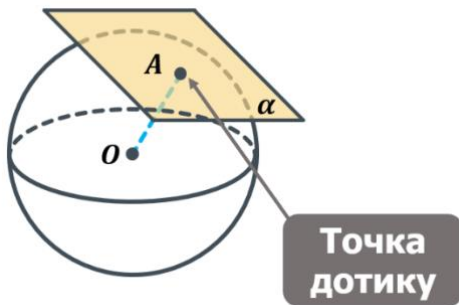


- Яка геометрична фігура утвориться внаслідок перерізу площиною, проходить через центр кулі?
(Круг)

- Яка геометрична фігура утвориться внаслідок перерізу площиною, проходить через центр сфери?
(Коло)

Такий переріз ще називають **великим кругом (відповідно для сфери – **великим колом**). Можна легко зробити висновок, що чим ближче розташований переріз до центра кулі (сфери) – тим більшим буде радіус такого перерізу.*

>> Дотична площина до сфери (кулі) <<

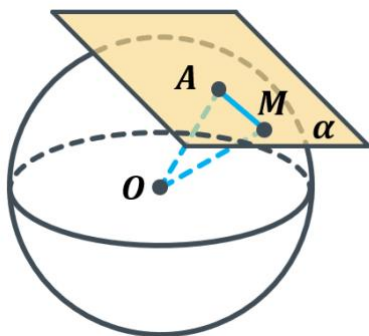


Площину, яка має зі сферою (кулею) тільки одну спільну точку, називають **дотичною площиною до сфери (кулі)**.

Теорема

Дотична площина до сфери (кулі) перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.

Доведення:



Нехай OA – не перпендикулярна до площини α , а похила.

Побудуємо $OM \perp \alpha$

- Чи може перпендикуляр бути більшим за його похилу?
(Ні)

Так як перпендикуляр не може бути більшим за його похилу, то враховуючи все вищесказане **точка M належить одночасно і площині і кулі.**

- Який робимо висновок?
(Радіус кулі не може бути похилою до дотичної площини, тобто $OA \perp \alpha$)

Доведено.

IV. Закріплення нових знань та вмінь учнів

№1

Наведіть приклади об'єктів навколишнього світу, предметів, уживаних у повсякденному житті, які мають форму сфери (кулі).

Відповідь (приклад відповіді): сфера добре асоціюється з тенісним чи футбольним м'ячем, куля – з кулькою в кульковому підшипнику;

№2

Радіус кулі дорівнює $\sqrt{5}$ см. Чи належить кулі точка A , якщо вона віддалена від центра кулі:

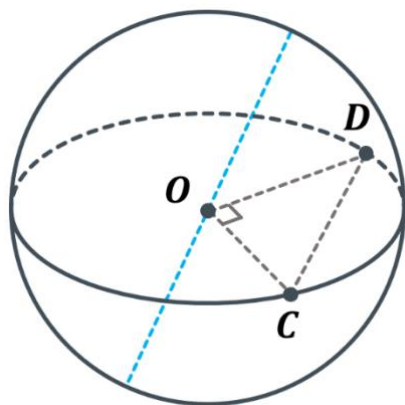
1) На 2 см;

2) На 2,3 см;

Відповідь: відстань від будь-якої точки кулі до її центра не може бути більшою за радіус кулі, отже точка, що знаходиться на відстані 2 см – належить кулі; точка, що знаходиться на відстані 2,3 см – не належить кулі, так як $\sqrt{5} \approx 2,236$

№3

Точки C і D лежать на сфері із центром O , діаметр якої дорівнює 8 см. Знайдіть відрізок CD , якщо трикутник COD є прямокутним.



Дано:

Діаметр сфери – 8 см;

$\angle COD = 90^\circ$;

Знайти:

CD —?

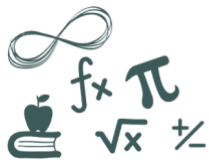
Розв'язок:

Так як діаметр сфери дорівнює двом радіусам, то $CO = OD = 4$ см

За теоремою Піфагора:

$$CD = \sqrt{OD^2 + OC^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ см}$$

Відповідь: $4\sqrt{2}$ см



Дано сферу радіуса 6 см і площину α . Якою має бути відстань від центра сфери до площини α , щоб:

- 1) Сфера та площина не мали спільних точок;
- 2) Сфера та площина мали одну спільну точку;
- 3) Перерізом сфери та площини було коло;
- 4) Перерізом сфери та площини було коло найбільш можливої довжини;

Відповідь:

- 1) $l > 6$ см
- 2) $l = 6$ см
- 3) $l < 6$ см
- 4) $l = 0$ см

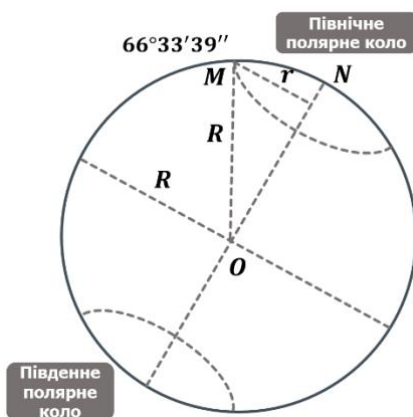
- 1) Яка географічна паралель є найбільшим колом земної кулі?
- 2) Знайдіть довжину полярного кола Землі, прийнявши радіус Землі рівним 6400 км. Відповідь округліть до тисяч кілометрів
- 3) Обчисліть шлях, який проходить за добу внаслідок обертання Землі навколо її осі населений пункт, у якому ми живете.

1) Яка географічна паралель є найбільшим колом земної кулі?

Екватор

(Екватор — уявне коло, проведене на поверхні планети на рівній відстані від обох географічних полюсів, тому екватор ділить Землю на дві рівні півкулі (Північну та Південну). Географічний екватор — лінія перетину земної кулі з площиною, що проходить через центр Землі, перпендикулярно до осі її обертання. Всі точки екватора мають географічну широту 0°)

2) Знайдіть довжину полярного кола Землі, прийнявши радіус Землі рівним 6400 км. Відповідь округліть до тисяч кілометрів



(Полярні кола — паралелі $66^\circ33'39''$ в північній і південній півкулях. Ми також знаємо, що полярний радіус Землі менший від екваторіального, так як Земля має форму геоїда, але для спрощення розв'язку задачі — уявімо, що земля має форму кулі)

// Знайдемо радіус полярного кола, потім знайдемо довжину полярного кола //

Дано:

$\triangle MNO$ — прямокутний;

$MO = 6400$ км;

$\angle M = 66^\circ$

Знайти:

C – довжина полярного кола

Розв'язок:

Розглянемо прямокутний $\triangle MNO$:

$$\cos 66^\circ = \frac{MN}{MO}$$

$$MN = \cos 66^\circ \cdot MO$$

$$MN \approx 0,4 \cdot 6400 \approx 2560 \text{ км}$$

$$C = 2\pi r \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 2560 \approx 16077 \text{ км}$$

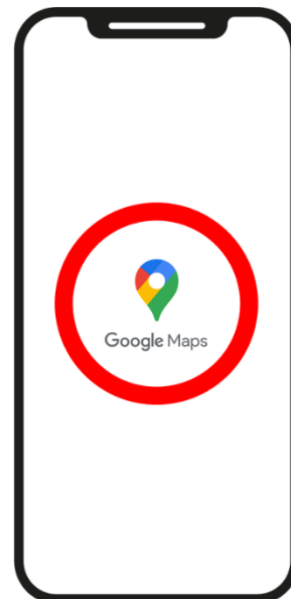
**Відповідь залежить від того, з якою точністю береться число π і $\cos 66^\circ$*

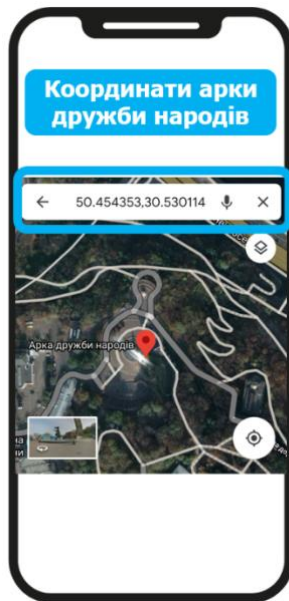
Відповідь: 16077 км

3) Обчисліть шлях, який проходить за добу внаслідок обертання Землі навколо її осі населений пункт, у якому ми живемо.

➤ *Як дізнатися координати місця?*

1) Відкрийте додаток Карти Google на телефоні або планшеті





2) Торкніться місця на карті, яке не позначено, і утримуйте його, доки не з'явиться червоний маркер

3) Координати відображаються у форматі десяткових градусів
(Спочатку вказується широта, потім довгота. Широта та довгота розділяються комою, десяткові цифри - крапками)

Наприклад, координати арки дружби народів, що в Києві:
 50.454353 , 30.5301114

Географічна широта – це кутова відстань даної точки на північ чи на південь від екватора, виражена в градусах.

Географічна довгота – це кутова відстань даної точки на захід чи на схід від нульового меридіана, виражена в градусах

**Завдання розв'язується подібно до попереднього завдання з полярним колом, але географічна широта кола (довгота нас не цікавить, так як радіус цього кола від неї не залежить) береться та, в якій знаходяться учні.*

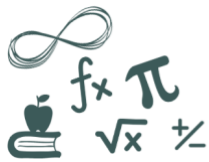
Розв'язок:

Знайдемо шлях, який проходить за добу арка дружби народів, що в Києві
(учні знаходять шлях, що проходить за добу їх місцевість)

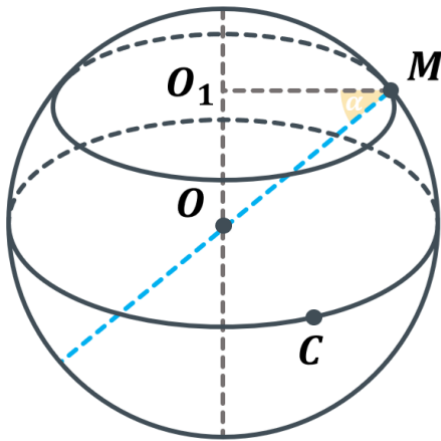
$$r = \cos 50 \cdot R \approx 0,64 \cdot 6400 \approx 4096 \text{ км}$$

$$C = 2\pi r \approx 2 \cdot 3.14 \cdot 4096 \approx 25722 \text{ км}$$

Відповідь: арка дружби народів, що в Києві, кожного дня проходить шлях 25722 км



Через кінець діаметра кулі радіуса R проведено площину, яка утворює із цим діаметром кут α , $\alpha \neq 90^\circ$. Знайдіть площу утвореного перерізу кулі.



Дано:

$$OM = R$$

$$\angle OMO_1 = \alpha, \alpha \neq 90^\circ$$

Знайти:

$$S_{\text{пер.кулі}} - ?$$

Розв'язок:

Розглянемо прямокутний $\triangle MO_1O$:

$$\cos \alpha = \frac{O_1M}{OM}$$

$$O_1M = \cos \alpha \cdot OM$$

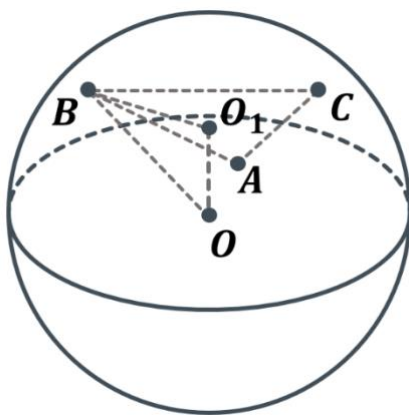
$$O_1M = R \cos \alpha$$

$$S_{\text{пер.кулі}} = \pi(O_1M)^2 = \pi R^2 \cos^2 \alpha$$

$$\text{Відповідь: } \pi R^2 \cos^2 \alpha$$

№7

На поверхні кулі позначено точки A , B і C такі, що $AB = BC = 15$ см, $\angle ABC = 120^\circ$. Знайдіть відстань від центра кулі до площини ABC , якщо радіус кулі дорівнює 17 см



Дано:

$\triangle ABC$ – рівнобедрений;

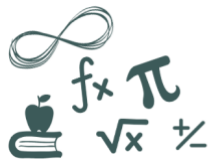
$$AB = BC = 15 \text{ см};$$

$$\angle ABC = 120^\circ$$

$$OB = 17 \text{ см};$$

Знайти:

$$OO_1 - ?$$



Розв'язок:

// Центр круга, що є перерізом кулі, є основою перпендикуляра, проведеного з центра кулі на січну площину. Отже, знайдемо радіус описаного кола навколо $\triangle ABC$, потім зможемо знайти відстань від центра кулі до площини ABC //

Знайдемо радіус кола, описаного навколо $\triangle ABC$:

$$O_1B = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4 \cdot S_{ABC}}$$

Знайдемо сторону AC за теоремою косинусів:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos 120^\circ = 15^2 + 15^2 - 2 \cdot 15 \cdot 15 \cdot$$

$$(-0,5) = 225 + 225 + 225 = 675 \text{ см}$$

$$AC = \sqrt{675} = 15\sqrt{3} \text{ см}$$

Знайдемо площу $\triangle ABC$:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB^2 \sin 120^\circ$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 15^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{225\sqrt{3}}{4} \text{ см}^2$$

$$O_1B = \frac{15 \cdot 15 \cdot 15\sqrt{3}}{4 \cdot \frac{225\sqrt{3}}{4}} = \frac{15 \cdot 15 \cdot 15\sqrt{3}}{225\sqrt{3}} = \frac{3375}{225} = 15 \text{ (см)}$$

Розглянемо прямокутний $\triangle OO_1B$:

$$OO_1 = \sqrt{OB^2 - O_1B^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{289 - 225} = \sqrt{64} = 8 \text{ см}$$

Відповідь: 8 см;

V. Підсумок уроку

- Сформулюйте означення сфери
- Сформулюйте означення кулі
- Що є перерізом кулі?
- Що є перерізом сфери?
- Які можливі випадки розміщення кулі та площини
- Яку ви знаєте властивість дотичної площини до кулі (сфери)?

VI. Домашнє завдання

Опрацювати §5 п.21 Виконати № 21.4; 21.9; 21.14	Мерзляк А.Г.
Опрацювати §7 Виконати № 7.2; 7.6; 7.10; 7.14; 7.18; 7.23	Істер О.С.
Опрацювати §9 Виконати № 9.1; 9.3; 9.5; 9.7; 9.10	Нелін Є.П.
Опрацювати §22 Виконати № 815; 819; 825; 845; 849	Бевз Г.П.