

Тема: Розв'язування типових вправ

Мета:

- *Навчальна:* закріпити знання, отримані на попередніх уроках;
- *Розвиваюча:* розвивати просторову уяву;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук; наполегливість;

Компетенції:

- Спілкування державною мовою (уміння ставити запитання і розпізнавати проблему; міркувати, робити висновки на основі отриманої інформації)

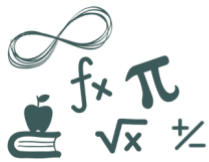
Тип уроку: закріплення нових знань;

Обладнання: конспект, презентація, мультимедійне обладнання;

Хід уроку

I. Організаційний етап

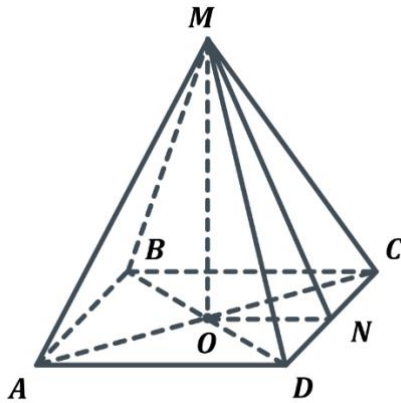
- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Перевірка виконання д/з
- Налаштування на роботу



II. Розв'язування задач

№1

Кожне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює 10 см. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

*Дано:* $MABCD$ – правильна піраміда; $AD = MD = 10$ см;*Знайти:* $S_{\Pi} - ?$ *Розв'язок:*

$$S_{\Pi} = S_{\text{осн}} + S_{\text{б}}$$

Знайдемо площу основи піраміди:

$$ABCD \text{ – квадрат} \Rightarrow S_{\text{осн}} = AD^2 = 10^2 = 100 \text{ см}^2$$

Знайдемо площу бічної поверхні піраміди:

Розглянемо рівносторонній $\triangle DMC$ ($DM = MC = DC$):

$$\left. \begin{array}{l} \angle D = 60^\circ \\ \sin D = \frac{MN}{MD} \end{array} \right| \Rightarrow MN = \sin D \cdot MD = \sin 60^\circ \cdot 10 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10 = 5\sqrt{3}$$

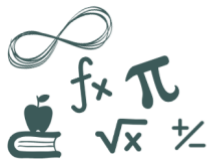
$$S_{DMC} = \frac{1}{2} DC \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5\sqrt{3} = 25\sqrt{3} \text{ см}^2$$

$$S_{\text{б}} = 4S_{DMC} = 4 \cdot 25\sqrt{3} = 100\sqrt{3} \text{ см}^2$$

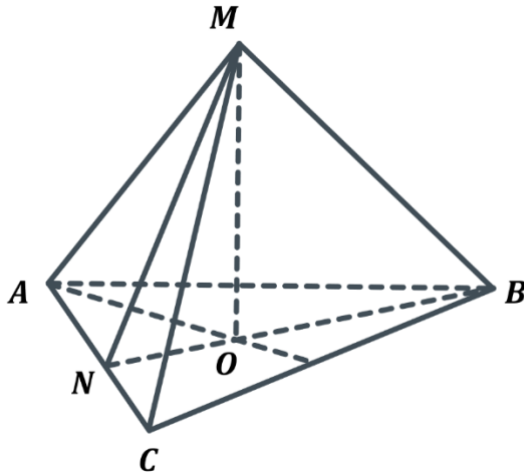
Знайдемо площу повної поверхні піраміди:

$$S_{\Pi} = S_{\text{осн}} + S_{\text{б}} = 100 + 100\sqrt{3} = 100(1 + \sqrt{3}) \text{ см}^2$$

Відповідь: $100(1 + \sqrt{3}) \text{ см}^2$



Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює a , а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює α . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.



Дано:

$MABC$ – правильна піраміда;

$AB = BC = AC = a$;

$\angle MNO = \alpha$;

Знайти:

S_6 – ?

Розв'язок:

*Щоб знайти площу бічної поверхні, необхідно знайти апофему нашої правильної трикутної піраміди, для цього знайдемо NO а потім з $\triangle MON$ знайдемо апофему MN

Знайдемо NO :

За умовою $MABC$ – правильна піраміда і $AB = BC = AC = a$, отже її висота проектується в цент основи її многокутника, у рівносторонньому трикутнику це є центр вписаного і описаного кола. Отже NO – радіус вписаного кола в трикутник ABC : $NO = r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Знайдемо MN :

Розглянемо $\triangle MON$:

$$\angle MON = 90^\circ$$

$$\angle MNO = \alpha$$

$$NO = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

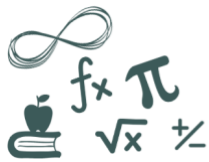
$$\cos N = \frac{NO}{MN}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{NO}{\cos N} = \frac{a\sqrt{3}}{6 \cos \alpha}$$

Знайдемо площу бічної поверхні:

$$S_6 = \frac{1}{2} P_{ABC} \cdot MN$$

$$P_{ABC} = 3a$$



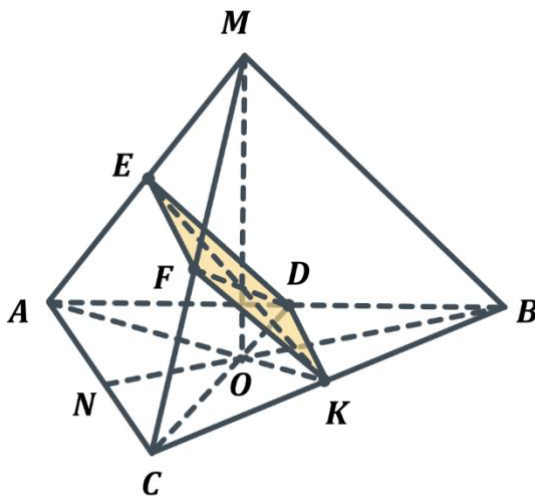
$$S_6 = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6 \cos \alpha} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{12 \cos \alpha} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4 \cos \alpha}$$

Відповідь: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4 \cos \alpha}$

№3

Точки D , E і F – середини ребер AB , AM і MC правильної піраміди $MABC$ відповідно, $AB = 8$ см, $AM = 12$ см

- 1) Побудуйте переріз піраміди, який проходить через точки D , E і F ;
- 2) Доведіть, що побудований переріз є прямокутником;
- 3) Знайдіть площу перерізу;



Дано:

$MABC$ – правильна піраміда;

$AD = DB$;

$AE = EM$;

$CF = FM$;

$AB = 8$ см;

$AM = 12$ см

Довести:

$FEDK$ – прямокутник;

Знайти:

$S_{FEDK} = ?$

Розв'язок:

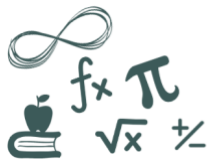
*Щоб довести, що $FEDC$ – паралелограм, необхідно показати, що в цього чотирикутника протилежні сторони попарно паралельні.

Щоб довести, що паралелограм $FEDC$ – прямокутник, доведемо, що його діагоналі рівні.

Доведемо, що чотирикутник $FEDC$ – паралелограм:

$$\left. \begin{array}{l} \triangle AMC \left| \begin{array}{l} EF - \text{середня лінія} \\ EF \parallel AC \end{array} \right. \\ \triangle ABC \left| \begin{array}{l} DK - \text{середня лінія} \\ DK \parallel AC \end{array} \right. \end{array} \right\} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} EF \parallel DK \\ EF = DK = \frac{1}{2} AC = 4 \text{ см} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle AMB \left| \begin{array}{l} ED - \text{середня лінія} \\ ED \parallel MB \end{array} \right. \\ \triangle CMB \left| \begin{array}{l} FK - \text{середня лінія} \\ FK \parallel MB \end{array} \right. \end{array} \right\} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} ED \parallel FK \\ ED = FK = \frac{1}{2} MB = 6 \text{ см} \end{array} \right.$$



Доведемо, що чотирикутник $FEDC$ – прямокутник:

Розглянемо $\triangle CFD$ і $\triangle AKE$:

$$\left. \begin{array}{l} \angle EAK = \angle FCD \text{ (як кут нахилу)} \\ \text{бічних ребер)} \\ AK = CD \text{ (як висоти)} \\ \text{рівностороннього} \\ \text{трикутника)} \\ AE = CF \text{ (половини)} \\ \text{бічних ребер)} \end{array} \right| \Rightarrow \triangle CFD = \triangle AKE \text{ (за двома} \\ \text{сторонами} \\ \text{і кутом між ними)}$$

Отже, діагоналі паралелограма $FEDC$ рівні. Так як паралелограм, діагоналі якого є рівними – прямокутник, то $FEDC$ – прямокутник.

Знайдемо площу перерізу:

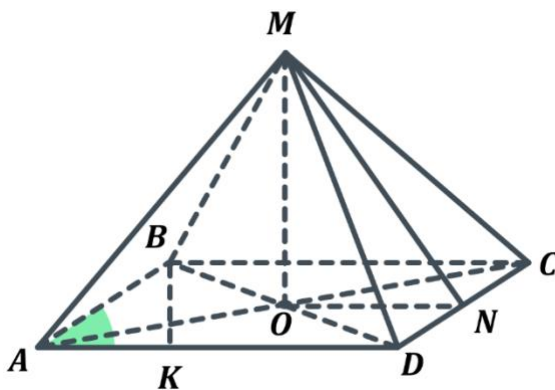
$$S_{FEDC} = EF \cdot ED = 4 \cdot 6 = 24 \text{ см}^2$$

Відповідь: 24 см^2

№4

Основою піраміди є ромб зі стороною 8 см і кутом 30° . Кожний із двограних кутів піраміди при ребрах основи дорівнює 45° . Знайдіть:

- 1) Площу бічної поверхні піраміди;
- 2) Висоту піраміди;



Дано:

$MABCD$ – піраміда;

$ABCD$ – ромб;

$AB = 8 \text{ см}$;

$\angle BAD = 30^\circ$;

Всі двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють 45° ;

$\angle MNO = 45^\circ$;

Знайти:

$S_{\text{б}} - ?$

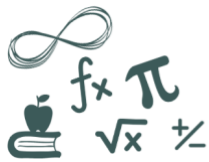
$MO - ?$

Розв'язок:

Розглянемо $\triangle MON$:

$$\left. \begin{array}{l} \angle MON = 90^\circ \\ \angle MNO = 45^\circ \end{array} \right| \Rightarrow \angle OMN = 45^\circ \Rightarrow \triangle MON - \text{рівнобедрений}$$

$$\triangle MON - \text{рівнобедрений} \Rightarrow MO = ON$$



Так як в будь-який ромб можна вписати коло, і радіусом вписаного кола буде висота ромба поділена на 2, то можемо знайти ON :

Розглянемо $\triangle BKA$:

$$\left. \begin{array}{l} \angle A = 30^\circ \\ \angle K = 90^\circ \\ AB = 8 \text{ см} \\ \sin A = \frac{BK}{AB} \end{array} \right| \Rightarrow BK = \sin A \cdot AB = \sin 30^\circ \cdot 8 = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4 \text{ см}$$

$$r = ON = \frac{BK}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ см}$$

Розглянемо $\triangle MON$:

$$\left. \begin{array}{l} MO = ON = 2 \\ \angle MON = 90^\circ \end{array} \right| \Rightarrow MN = \sqrt{MO^2 + ON^2}$$

$$MN = \sqrt{MO^2 + ON^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ см}$$

Знайдемо площу бічної поверхні піраміди:

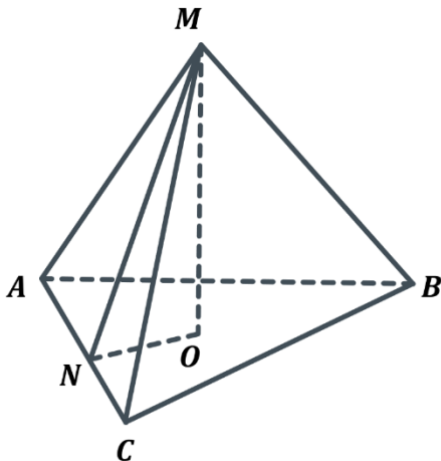
$$S_6 = \frac{1}{2} P_{ABCD} \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 2\sqrt{2} = 32\sqrt{2} \text{ см}^2$$

Відповідь: $32\sqrt{2} \text{ см}^2$

№5

Основою піраміди є трикутник зі сторонами 5 см, 12 см і 13 см, а всі двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють 30° . Знайдіть:

- 1) Площу бічної поверхні піраміди;
- 2) Висоту піраміди;



Дано:

$MABC$ – піраміда;

$AC = 5 \text{ см}$;

$BC = 12 \text{ см}$;

$AB = 13 \text{ см}$;

Всі двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють 30° ;

Знайти:

S_6 – ?

MO – ?

Розв'язок:

За теоремою, оберненою до теореми Піфагора:

$$AC^2 + BC^2 = AB^2$$

$$5^2 + 12^2 = 13^2$$

$$25 + 144 = 169$$

$$169 = 169$$

Отже $\triangle ACB$ – прямокутний;

Так як всі двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють 30° , проекцією вершини піраміди на площину основи є центр вписаного кола многокутника, що є основою піраміди;

Так як основа піраміди – прямокутний трикутник, то радіус вписаного кола можна знайти за формулою:

$$r = \frac{a + b - c}{2};$$

a, b – катети прямокутного трикутника;

c – гіпотенуза прямокутного трикутника;

Отже:

$$ON = \frac{AC + BC - AB}{2} = \frac{5 + 12 - 13}{2} = 2 \text{ см}$$

Розглянемо прямокутний $\triangle MON$:

$$\left. \begin{array}{l} \angle MON = 90^\circ \\ \angle MNO = 30^\circ \\ NO = 2 \text{ см} \\ \cos N = \frac{NO}{MN} \end{array} \right\} \Rightarrow MN = \frac{NO}{\cos N} = \frac{2}{\cos 30^\circ} = \frac{4}{\sqrt{3}} \text{ см}$$

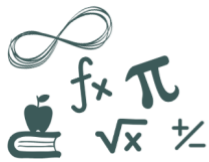
Знайдемо площу бічної поверхні:

$$S_6 = \frac{1}{2} P_{ABC} \cdot MN$$

$$P_{ABC} = 5 + 12 + 13 = 30 \text{ см}$$

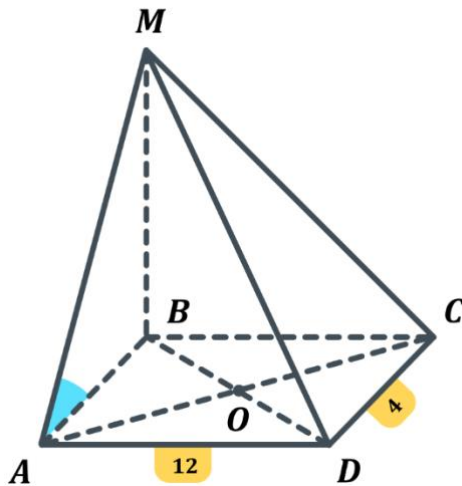
$$S_6 = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{60}{\sqrt{3}} = \frac{60\sqrt{3}}{3} = 20\sqrt{3} \text{ см}^2$$

Відповідь: $20\sqrt{3} \text{ см}^2$



Основою піраміди є прямокутник зі сторонами 4 см і 12 см. Площини двох бічних граней перпендикулярні до площини основи. Площина ще однієї грані, яка проходить через більшу сторону основи, утворює кут 45° із площиною основи. Знайдіть:

- 1) Висоту піраміди;
- 2) Площу бічної поверхні піраміди;



Дано:

$MABCD$ – піраміда;
 $ABCD$ – прямокутник;
 $AB = 4$ см;
 $BC = 12$ см;
 $AMB \perp ABCD$
 $MBC \perp ABCD$
 $\angle MAB = 45^\circ$

Знайти:

MB – ?
 S_6 – ?

Розв'язок:

Розглянемо прямокутний $\triangle ABM$:

$$\left. \begin{array}{l} \angle ABM = 90^\circ \\ AB = 4 \text{ см} \\ \angle MAB = 45^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow MB = \operatorname{tg} A \cdot AB = \operatorname{tg} 45^\circ \cdot 4 = 4 \text{ см}$$
$$\operatorname{tg} A = \frac{MB}{AB}$$

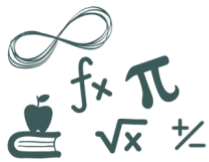
$$\left. \begin{array}{l} \angle ABM = 90^\circ \\ \angle MAB = 45^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle AMB = 45^\circ \Rightarrow \triangle ABM - \text{рівнобедрений}$$

Отже, $AB = MB = 4$ см

$$MA = \sqrt{AB^2 + MB^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ см}$$

Розглянемо прямокутний $\triangle MBC$:

$$\left. \begin{array}{l} \angle MBC = 90^\circ \\ BC = 12 \text{ см} \\ MB = 4 \text{ см} \end{array} \right\} \Rightarrow MC = \sqrt{MB^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 12^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10} \text{ см}$$



Знайдемо площі бічних граней:

$$S_{ABM} = \frac{1}{2} AB \cdot MB = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8 \text{ см}^2$$

$$S_{MBC} = \frac{1}{2} BC \cdot MB = \frac{12 \cdot 4}{2} = 24 \text{ см}^2$$

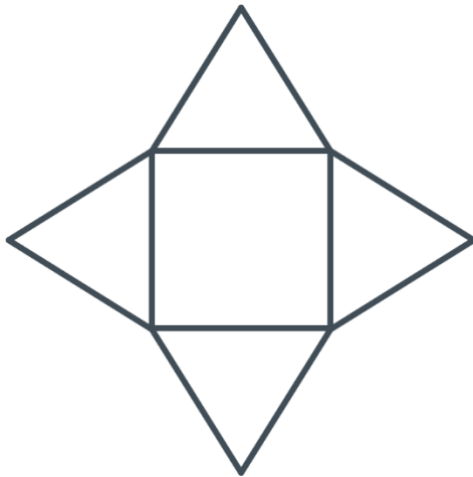
$$S_{MAD} = \frac{1}{2} AD \cdot MA = \frac{12 \cdot 4\sqrt{2}}{2} = 24\sqrt{2} \text{ см}^2$$

$$S_{MCD} = \frac{1}{2} DC \cdot MC = \frac{4 \cdot 4\sqrt{10}}{2} = 8\sqrt{10} \text{ см}^2$$

$$S_6 = S_{ABM} + S_{MBC} + S_{MAD} + S_{MCD} = 8 + 24 + 24\sqrt{2} + 8\sqrt{10} \\ = (32 + 8\sqrt{10} + 24\sqrt{2}) \text{ см}^2$$

Відповідь: 1) 4 см; 2) $(32 + 8\sqrt{10} + 24\sqrt{2}) \text{ см}^2$;

№7



// ЗНО 2014

На рисунку зображено розгортку піраміди, що складається з квадрата, сторона якого дорівнює 10 см, і чотирьох правильних трикутників. Визначте площу бічної поверхні цієї піраміди.

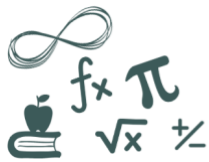
А	Б	В	Г	Д
$100\sqrt{3}$	100	$400\sqrt{3}$	$100 \cdot (1 + \sqrt{3})$	200

Розв'язок:

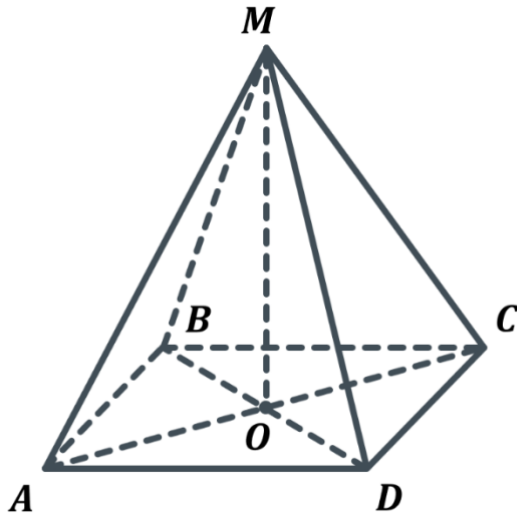
Так як дано піраміду з квадратом в основі і за умовою всі бічні грані – правильні трикутники. Площу правильного трикутника можна знайти за формулою: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, то площа бічної поверхні дорівнює:

$$S_6 = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 4 \cdot \frac{10^2\sqrt{3}}{4} = 100\sqrt{3}$$

Відповідь: А) $100\sqrt{3}$



Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 3 см, а сторона її основи – 12 см. Знайдіть довжину бічного ребра піраміди.



Дано:

$MABCD$ – правильна чотирикутна піраміда;

$ABCD$ – квадрат;

$MO = 3$ см;

$AB = 12$ см;

Знайти:

MA – ?

Розв'язок:

$$\left. \begin{array}{l} ABCD - \text{квадрат} \\ AC = AB\sqrt{2} \\ AB = 12 \text{ см} \end{array} \right| \Rightarrow AC = 12\sqrt{2} \text{ см}$$

Так як діагоналі квадрата точкою перетину діляться навпіл, то:

$$AO = OC = \frac{AC}{2} = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2} \text{ см}$$

Розглянемо прямокутний $\triangle AOM$:

$$\left. \begin{array}{l} \angle O = 90^\circ \\ MO = 3 \text{ см} \\ AO = 6\sqrt{2} \text{ см} \end{array} \right| \Rightarrow AM = \sqrt{AO^2 + OM^2}$$

$$AM = \sqrt{AO^2 + OM^2} = \sqrt{72 + 9} = 81 = 9 \text{ см}$$

Відповідь: 9 см

III. Підсумок уроку

- Що ми називаємо пірамідою?
 - Що є висотою піраміди?
 - Які існують піраміди?
 - Яка піраміда є правильною?
 - Що таке апофема піраміди? Чи кожна піраміда має апофему?
 - Який переріз піраміди ми називаємо діагональним?
 - Який отримаємо многокутник у переріз піраміди площиною, що є паралельною основі?
 - Яка геометрична фігура називається зрізаною пірамідою?
 - Як знайти площу бічної поверхні піраміди?
- Які ми знаємо корисні твердження для розв'язування задач?

IV. Домашнє завдання

Повторити §4 п.18 Виконати № 18.13; 18.20; 18.24; 18.29; 18.31	Мерзляк А.Г.
Повторити §3 Виконати № 3.8; 3.30; 3.32; 3.36; 3.41	Істер О.С.
Повторити §4 Виконати № 4.9; 4.10; 4.11	Нелін Є.П.
Повторити §18 Виконати № 676; 680; 681	Бевз Г.П.