

Тема: Вимірювання кутів у просторі. Ортогональне проектування.

Мета: увести поняття ортогонального проектування; кутів у просторі між прямими, площинами, прямою і площиною. Розвивати просторову уяву.

Хід уроку

I. Організаційний етап

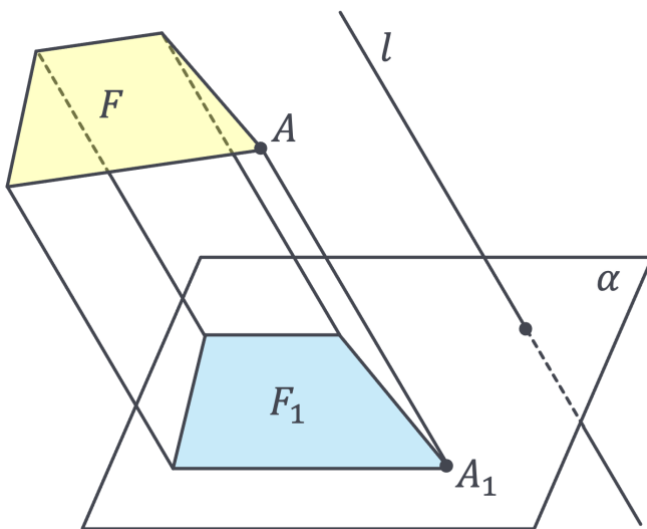
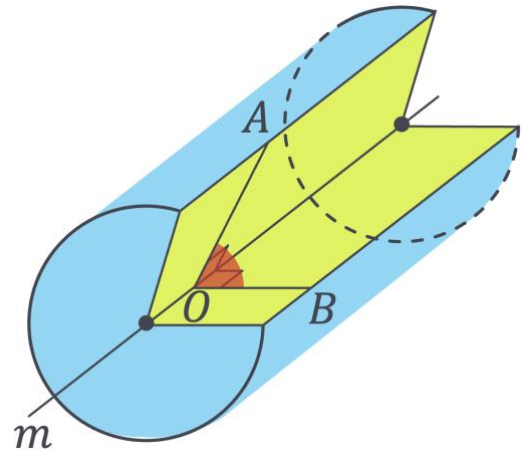
- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

I. Актуалізація опорних знань

- Пригадайте, що таке двогранний кут?

Двогранний кут – фігура, утворена двома півплощинами зі спільною прямою, яка їх обмежує.

- Чи може градусна міра двогранного кута бути більшою за 90° ? (ТАК)
- Чи може градусна міра кута між площинами бути більшою за 90° ? (НІ)
- Пригадайте, що таке паралельне проектування?



**F – оригінал фігури;
 α – площина проєкції;
 l – проєктуюча пряма;**

Через довільну точку A фігури F проведемо пряму, паралельну проєктуючій прямій l . Ця пряма перетне площину α в точці A_1 , тоді:

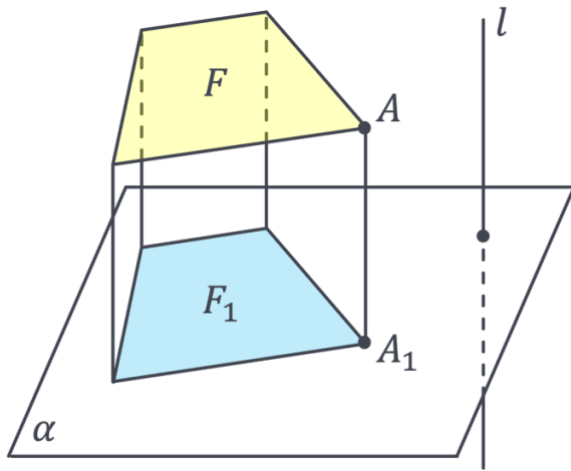
A_1 – зображення т. A в площині α

Побудувавши в такий спосіб всі точки фігури F отримаємо в площині α фігуру F_1 .

F_1 – паралельна проєкція фігури F на площину α .

II. Вивчення нового матеріалу

// Ортогональне проектування



Ортогональне проектування – це паралельне проектування, в якого напрям проектуючої прямої перпендикулярний до площини проєкції.

- Оскільки площина оригіналу проектуючої фігури може бути нахилена до площини проєкції під довільним кутом, то площа проєкції фігури може відрізнятись від площі оригіналу фігури і цю площу можна знайти за формулою.

$S_{\text{пр}}$ - площа многокутника F_1 ;

$S_{\text{ф}}$ - площа многокутника F ;

$\cos \varphi$ - кут між площиною проєкції і площиною фігури;

$$S_{\text{пр}} = S_{\text{ф}} \cdot \cos \varphi$$

ПРОБЛЕМНЕ ПИТАННЯ

- Як знайти кут між площиною проєкції фігури і площиною фігури?**

(Ми вже з Вами знаємо, що кут між площинами, які співпадають, або паралельні – дорівнює 0° , розглянемо більш детально поняття кута між площинами)

// Кут між площинами у просторі

Площини співпадають



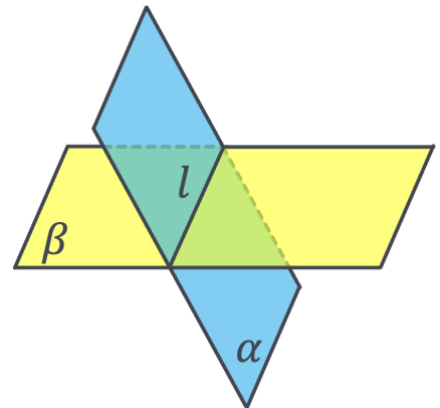
$$\alpha \equiv \beta$$
$$\angle(\alpha, \beta) = 0^\circ$$

Площини паралельні



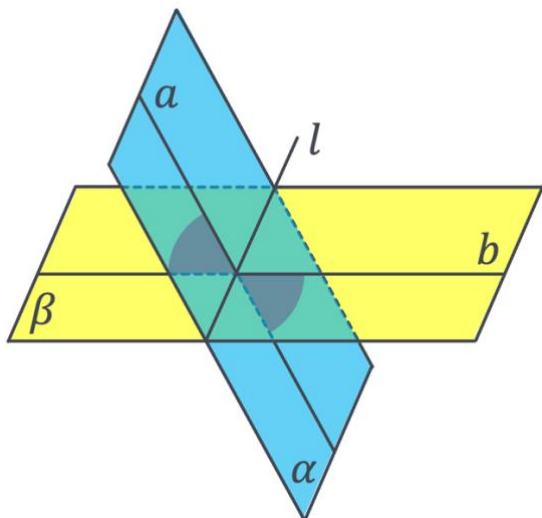
$$\alpha \parallel \beta$$
$$\angle(\alpha, \beta) = 0^\circ$$

Площини перетинаються



$$\alpha \cap \beta = l$$
$$0^\circ < \angle(\alpha, \beta) < 90^\circ$$

- Як знайти кут між площинами?
(Учні висловлюють власну думку)



$$0^\circ < \angle(\alpha, \beta) < 90^\circ$$

Кут між площинами – це менший з утворених двограних кутів внаслідок перетину цих площин.



Як знайти кут між площинами?

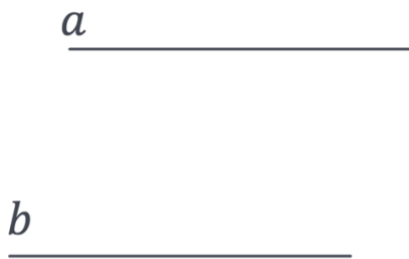
Це кут між прямими, проведеними в цих площинах перпендикулярно до лінії перетину площин.

ПРОБЛЕМНЕ ПИТАННЯ

Дані прямі не завжди перетинаються в одній точці, як знайти кут між мимобіжними прямими?

// Кут між прямими у просторі

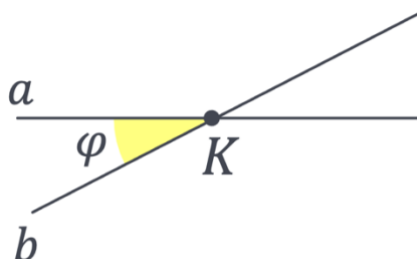
Прямі паралельні



$$a \parallel b$$

$$\angle(a, b) = 0^\circ$$

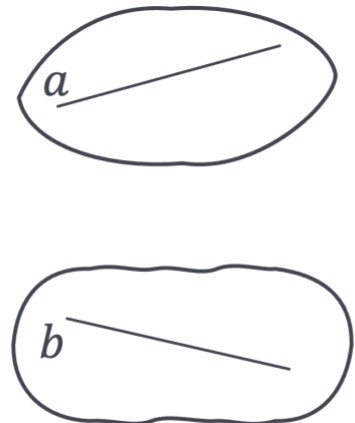
Прямі перетинаються



$$a \cap b = K$$

$$\angle(a, b) = \varphi$$

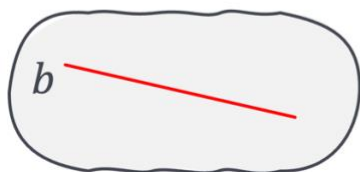
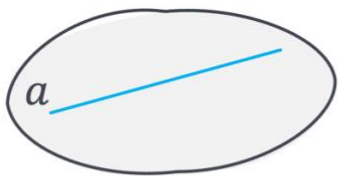
Прямі мимобіжні



$$a \div b$$

- Як знайти кут між мимобіжними прямими?

(Учні висловлюють власну думку)



Як знайти кут між мимобіжними прямими a і b ?

- 1) Будуємо прямі $a_1 \parallel a$ і $b_1 \parallel b$ такі, що $a_1 \cap b_1$
- 2) Кут φ між прямими a_1 і b_1 – це кут між прямими a і b

$$\angle(a, b) = \angle(a_1, b_1) = \varphi$$

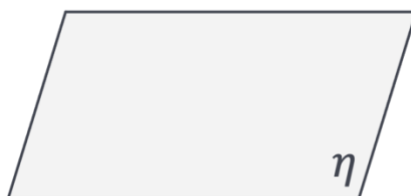
// Кут між прямою і площиною

Пряма належить площині



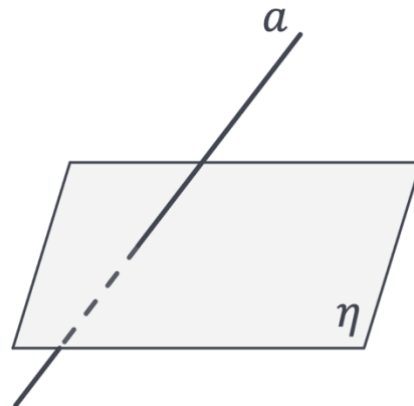
$$a \in \eta$$

Пряма паралельна площині



$$a \parallel \eta$$

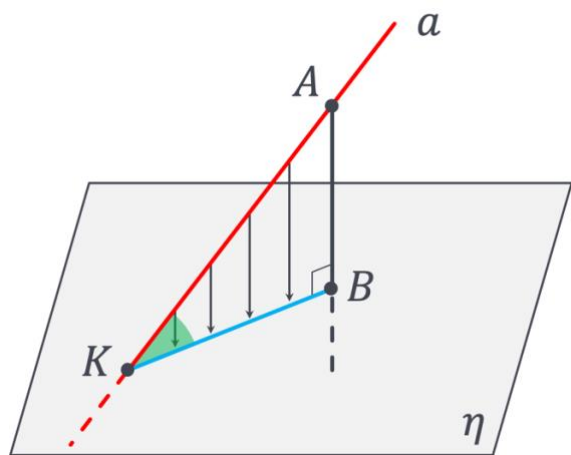
Пряма перетинає площину



$$a \cap \eta$$

ПРОБЛЕМНЕ ПИТАННЯ

- Як знайти кут між площинами?
(Учні висловлюють власну думку)



Кут між прямою і площиною – це кут між даною прямою і її проекцією на цю площину.

$$\angle(a, \eta) = \angle AKB$$

Приклад

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб.

Знайдіть $\angle(AD_1, DC)$

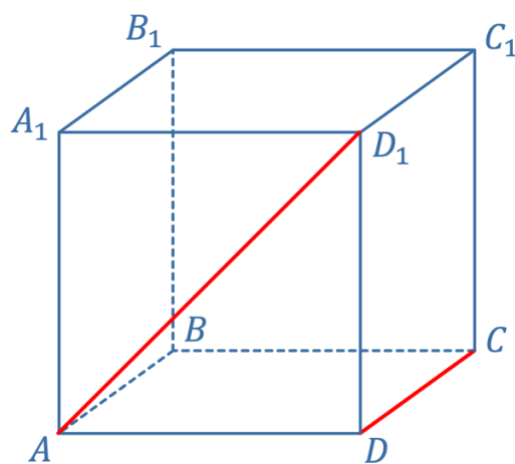
Розв'язання:

$$DC \parallel AB \rightarrow \angle(AD_1, DC) = \angle(AD_1, AB)$$

$$\left. \begin{array}{l} AD - \text{проекція} \\ AD_1 \text{ на } (ABC) \\ AB \perp AD \end{array} \right\} \rightarrow AB \perp AD_1$$

(за теоремою про три перпендикуляри)

$$\angle(AD_1, AB) = \angle(AD_1, DC) = 90^\circ$$

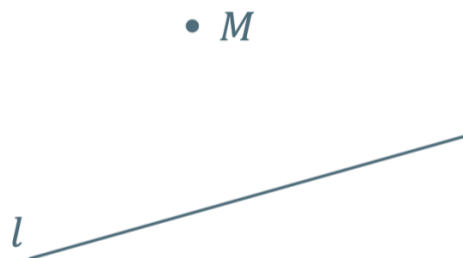


III. Розв'язування завдань

№1

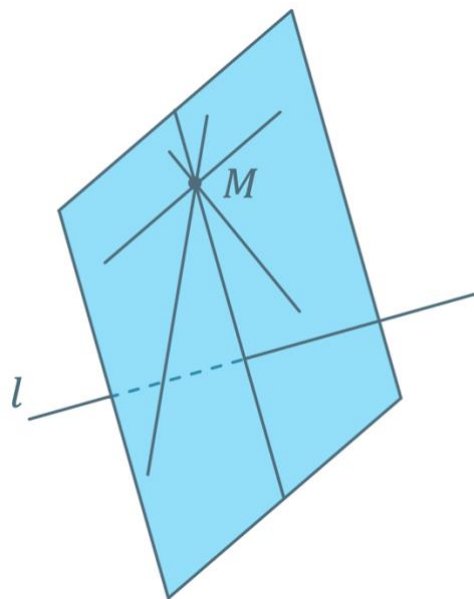
- 1) Дано пряму l і точку $M \notin l$
- 2) Скільки можна провести через т.М прямих, перпендикулярних до прямої l ?

Відповідь: безліч



3) Яку фігуру утворюють всі такі прямі?

Відповідь: площину



№2

Дано два трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, які лежать в різних площинах, що утворюють кут 45° . Трикутник $A_1B_1C_1$ є рівнобедреним з основою 5 см і висотою проведеною до основи 6 см, а також є ортогональною проекцією трикутника ABC . Обчисліть площу трикутника ABC .

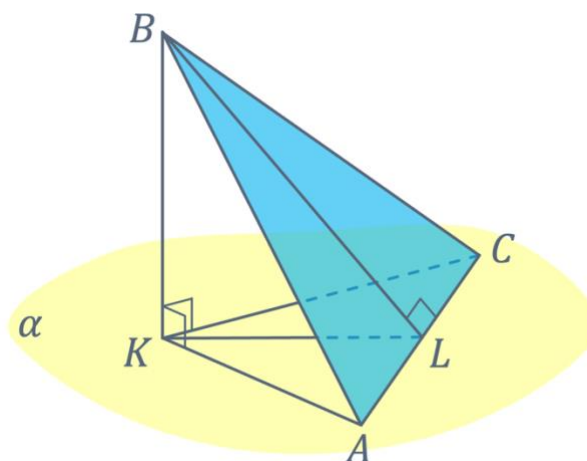
Розв'язання:

$$\left. \begin{aligned} S_{A_1B_1C_1} &= S_{ABC} \cdot \cos 45^\circ \\ S_{ABC} &= \frac{S_{A_1B_1C_1}}{\cos 45^\circ} \\ S_{A_1B_1C_1} &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 = 15 \text{ см}^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow S_{ABC} = \frac{15}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 15 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{30}{\sqrt{2}} = 15\sqrt{2} \text{ см}^2$$

Відповідь: $15\sqrt{2} \text{ см}^2$

№3

Рівнобедрений трикутник ABC утворює з площиною α кут 30° , $AB = BC$, $AC \in \alpha$. Знайдіть довжину проекції сторони BC на площину α , якщо $BC = 12$ см, $AC = 4$ см



Розв'язання:

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC - \text{рівнобедрений} \\ AC - \text{основа} \\ BL - \text{висота} \end{array} \right| \rightarrow BL - \text{медіана} \rightarrow AL = LC = \frac{AC}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ см}$$

З $\triangle BLC$ ($\angle L = 90^\circ$):

$$BL = \sqrt{BC^2 - LC^2} = \sqrt{12^2 - 2^2} = \sqrt{144 - 4} = \sqrt{140} = \sqrt{4 \cdot 35} = 2\sqrt{35} \text{ см}$$

$$BL \perp AC \rightarrow KL \rightarrow AC \left(\begin{array}{c} \text{За теоремою} \\ \text{про три} \\ \text{перпендикуляри} \end{array} \right) \rightarrow \angle BLK = \angle(ABC, \alpha) = 30^\circ$$

З $\triangle BKL$ ($\angle K = 90^\circ$):

$$\angle L = 30^\circ \rightarrow BK = \frac{1}{2}BL = \frac{2\sqrt{35}}{2} = \sqrt{35} \text{ см}$$

З $\triangle BKC$ ($\angle K = 90^\circ$):

$$KC = \sqrt{BC^2 - BK^2} = \sqrt{12^2 - (\sqrt{35})^2} = \sqrt{144 - 35} = \sqrt{109} \text{ см}$$

Відповідь: $\sqrt{109}$ см

IV. Підсумок уроку

- Поясніть, як знайти кут між мимобіжними прямими?
- Поясніть, як знайти кут між площинами, які перетинаються?
- Поясніть, як знайти кут між прямою і площиною, які перетинаються?
- Чи можуть у просторі прямі, які не перетинаються, бути перпендикулярними?
- Поясніть, що таке ортогональне проектування? Як знайти площу фігури, утвореної внаслідок ортогонального проектування?

V. Домашнє завдання

Опрацювати §10, вивчити теорему
Виконати № 10.3, 10.6, 10.9, 10.14

О.С. Істер
(2018)

Опрацювати §5, П.37, вивчити теорему 37.1
Виконати № 37.10, 37.13, 37.19, 37.21

А.Г. Мерзляк
(2018)