

Тема: Розв'язування типових вправ за темами «Аксіоми та наслідки з них», «Взаємне розміщення прямих у просторі»

Хід уроку

I. Організаційний етап

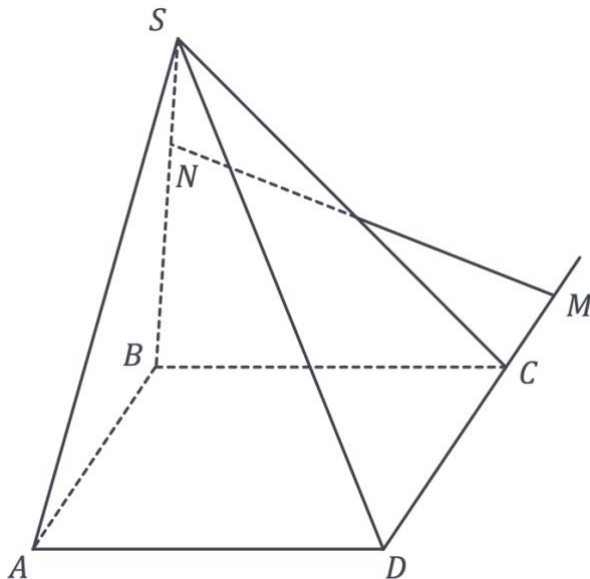
- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

I. Актуалізація опорних знань

- Попросити учнів сформулювати та пояснити аксіоми стереометрії та найпростіші наслідки з аксіом стереометрії а також пояснити, як можуть розміщуватись прямі у просторі. Сформулювати теореми про взаємне розміщення прямих у просторі.

II. Розв'язування завдань

№1



$SABCD$ – чотирикутна піраміда, в основі якої лежить паралелограм, точка M належить продовженню ребра DC , $N \in BS$.

А) Доведіть, що пряма AM лежить в площині ADC

Б) Назвіть пряму, по якій перетинаються площини DMN і SDC

Доведення:

А) Доведіть, що пряма AM лежить в площині ADC .

$$\begin{array}{l} M \in DC \\ DC \subset ADC \end{array} \Bigg| \rightarrow M \in ADC$$

$$\begin{array}{l} A \in ADC \\ M \in ADC \end{array} \Bigg| \begin{array}{l} \text{За аксіомою C2} \\ \rightarrow \end{array} AM \subset ADC$$

Б) Назвіть пряму, по якій перетинаються площини DMN і SDC

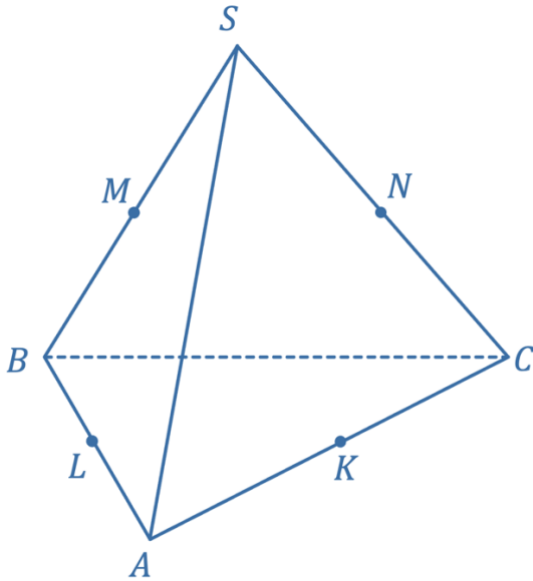
$$\begin{array}{l} D \in DMN \\ M \in DMN \end{array} \Bigg| \begin{array}{l} \text{За аксіомою C2} \\ \rightarrow \end{array} DM \subset DMN$$

$$\begin{array}{l} C \in DM \\ DM \subset DMN \end{array} \Bigg| \rightarrow C \in DMN$$

Оскільки дві точки належать одночасно двом площинам, то вони перетинаються по прямій, що проходить через ці точки

$$\left. \begin{array}{l} D \in SDC \\ C \in SDC \\ D \in DMN \\ C \in DMN \end{array} \right\} \rightarrow DMN \cap SDC = DC$$

№2



$SABC$ – тетраедр. Точки M, N, L, K – середини ребер BS, SC, BA, AC відповідно. Чи можна провести площину через прямі:

- А) SK і LN
- Б) BS і KN
- В) SK і MK
- Г) MN і LK

Розв'язання:

А) SK і LN

$$\left. \begin{array}{l} SK \subset ASC \\ LN \cap ASC = N \\ N \notin SK \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{За теоремою 6} \\ \rightarrow \end{array} SK \div LN$$

Ні, прямі мимобіжні, тому площину провести не можна.

Б) BS і KN

$$\left. \begin{array}{l} BS \in ABS \\ KN \in ASC \\ ABS \cap ASC = AS \\ KN \parallel AS \text{ (середня лінія)} \\ BS \cap AS = S \end{array} \right\} \rightarrow BS \div KN$$

Ні, прямі мимобіжні, тому площину провести не можна.

В) SK і MK

$$SK \cap MK = K \quad \left| \begin{array}{l} \text{За теоремою 2} \\ \rightarrow \end{array} \right. \text{Таку площину можна провести єдину.}$$

Так, прямі перетинаються, тому можемо через них провести площину.

Г) MN і LK

MN і LK – середні лінії трикутників BSC і BAC відповідно, отже:

$$\left. \begin{array}{l} MN \parallel BC \\ LK \parallel BC \end{array} \right| \rightarrow \text{Через прямі } MN \text{ і } LK \text{ можна провести єдину площину}$$

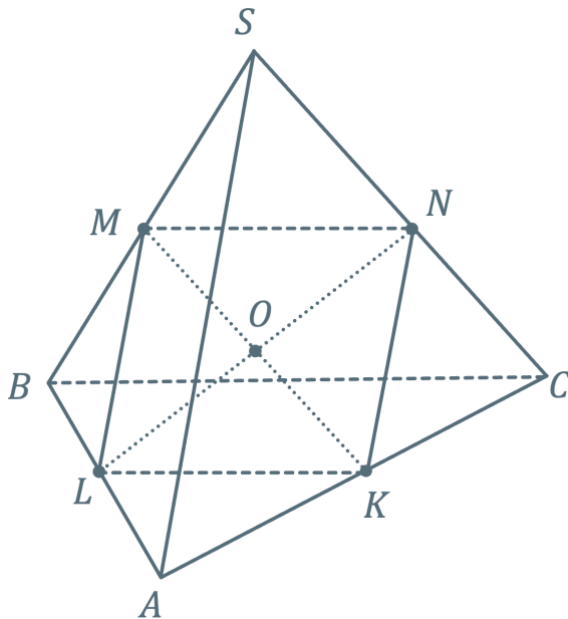
(Через дві паралельні прямі можна провести площину і до того ж тільки одну)

Так, прямі паралельні, тому можемо через них провести площину.

Відповідь: А) Ні // Б) Ні // В) Так // Г) Так

№3

Доведіть, що відрізки, які з'єднують середини протилежних ребер тетраедра, мають спільну точку і в цій точці діляться навпіл.



Довести:

$$\begin{array}{l} MK \cap NL; \\ MO = OK; \\ OL = ON; \end{array}$$

Доведення:

З'єднаємо середини ребер, що лежать в одній грані. LM, MN, NK, LK – середні лінії трикутників ABS, BSC, SCA, CAB відповідно, тому:

$$\left. \begin{array}{l} MN \parallel BC \\ MN = \frac{1}{2} BC \\ LK \parallel BC \\ LK = \frac{1}{2} BC \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{За теоремою 5} \\ \rightarrow \end{array} \begin{array}{l} MN \parallel LK \\ MN = LK \end{array}$$

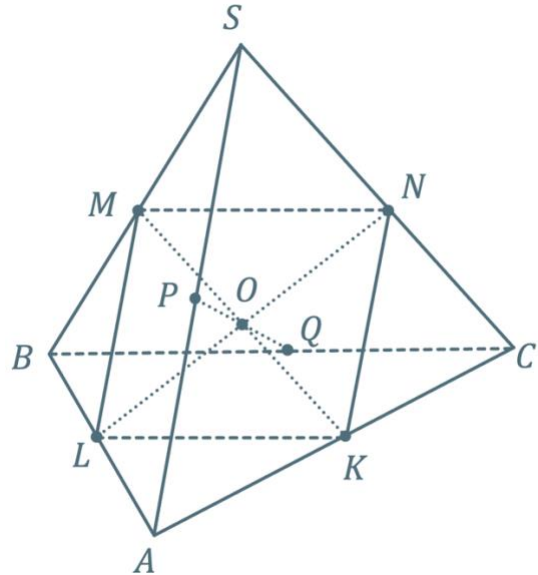
Розглянемо чотирикутник $MNKL$:

$$\left. \begin{array}{l} MN \parallel LK \\ MN = LK \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{За ознакою паралелограма} \\ \rightarrow \end{array} MNKL \text{ – паралелограм}$$

Оскільки діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл, то:

$$\left. \begin{array}{l} MK \cap LN = O \\ MO = OK \\ OL = ON \end{array} \right| \text{За властивістю паралелограма}$$

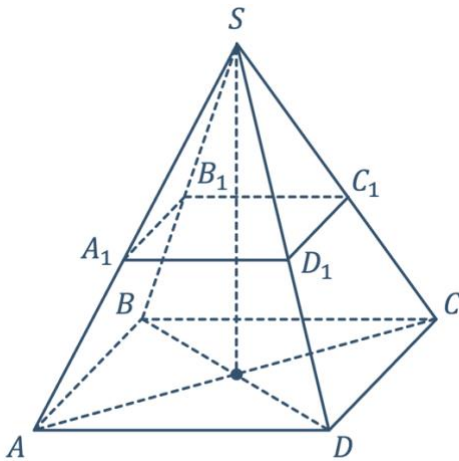
Аналогічно можна довести, що PQ і LN (PQ і MK) також перетинаються і точкою перетину діляться навпіл.



№4

$ABCD$ – паралелограм, $S \notin ABCD$. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 – середини відрізків SA, SB, SC, SD відповідно. Знайдіть $P_{A_1B_1C_1D_1}$, якщо $P_{ABCD} = 32$ см.

Розв'язання:



З'єднаємо середини ребер, що лежать в одній грані. $A_1D_1, A_1B_1, B_1C_1, D_1C_1$ – середні лінії трикутників ASD, ASB, BSC, DSC відповідно, тому:

$$\left. \begin{aligned} A_1D_1 &= \frac{1}{2}AD \\ A_1B_1 &= \frac{1}{2}AB \\ B_1C_1 &= \frac{1}{2}BC \\ D_1C_1 &= \frac{1}{2}DC \end{aligned} \right\} \rightarrow P_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{2}P_{ABCD} = \frac{32}{2} = 16 \text{ см}$$

Відповідь: 16 см

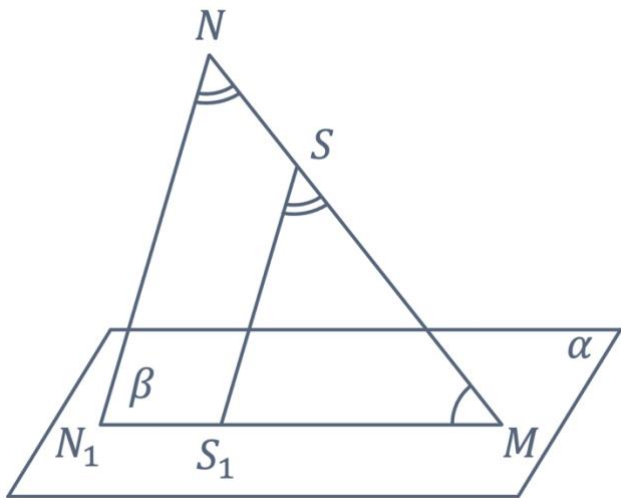
№5

Через кінець M відрізка MN побудували площину α . Через кінець N і точку S відрізка MN побудували паралельні прямі, що перетинають площину α в точках N_1 і S_1 . Знайдіть довжину відрізка NN_1 , якщо:

А) $SS_1 = 10$ см, $MS:SN = 2:3$

Б) $SS_1 = 8$ см, $MN:MS = 2:1$

Розв'язання:



A) $SS_1 = 10 \text{ cm}$, $MS:SN = 2:3$

Побудуємо рисунок.

$$\left. \begin{array}{l} NN_1 \parallel SS_1 \\ NN_1 \cap MN = M \\ SS_1 \cap MN = S \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} NN_1, SS_1 \text{ і } MN \\ \text{лежать в одній} \\ \text{площині, назове-} \\ \text{мо цю площину } \beta \end{array}$$

$$\begin{aligned}\alpha \cap \beta &= N_1 M \\ N_1 M &\in \beta\end{aligned}$$

Розглянемо трикутники MNN_1 і MSS_1 , що лежать в площині β :

$$\angle S = \angle N \left(\begin{array}{c} \angle M - \text{спільний} \\ \text{як відповідні кути} \\ \text{при перетині} \\ \text{паралельних прямих} \\ \text{січною} \end{array} \right) \Bigg| \rightarrow \Delta MNN_1 \sim \Delta MSS_1 \text{ (за ознакою)}$$

Оскільки $\Delta M N N_1 \sim \Delta M S S_1$, то:

$$\frac{MN}{MS} = \frac{NN_1}{SS_1}$$

Оскільки $MN = MS + SN$, то:

$$\frac{MS + SN}{MS} = \frac{NN_1}{SS_1} \rightarrow 1 + \frac{SN}{MS} = \frac{NN_1}{SS_1} \rightarrow 1 + \frac{3}{2} = \frac{NN_1}{10} \rightarrow \frac{5}{2} = \frac{NN_1}{10}$$

$$NN_1 = \frac{5}{2} \cdot 10 = 25 \text{ (cm)}$$

Б) $SS_1 = 8$ см, $MN:MS = 2:1$

$$\frac{NN_1}{SS_1} = \frac{MN}{MS} \rightarrow NN_1 = \frac{MN \cdot SS_1}{MS} = \frac{2 \cdot 8}{1} = 16 \text{ (cm)}$$

Відповідь: А) 25 (см); Б) 16 (см)

III. Підсумок уроку

- Чи можна через точку A , яка не належить прямій a , провести пряму, що буде паралельною прямій a ? Скільки таких прямих можна побудувати?
- Сформулюйте теорему про існування і єдиність площини, що проходить через пряму і точку, що їй не належить.
- Сформулюйте теорему про існування і єдиність площини, яка проходить через дві прямі, що перетинаються.
- Сформулюйте ознаку паралельності прямих
- Сформулюйте ознаку мимобіжності прямих

IV. Домашнє завдання

Повторити §2

Виконати №2.10; 2.21; 2.37

О.С. Істер
(2018)

Повторити § 4, п.27 – 29

Виконати № 28.4; 28.6; 29.11

А.Г. Мерзляк
(2018)