

Похідна та її застосування.

I Варіант

- 1) (2 б) Знайдіть похідну функції $f(x) = x^5 - \frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 3x - 1$

Відповідь:

$$f'(x) = 5x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 3$$

- 2) (2 б) Тіло рухається за законом $S(t) = \frac{t^3}{3} - 3t^2 + 2t - 8$, де S вимірюється в метрах, час t – у секундах. Знайдіть значення миттєвої швидкості матеріальної точки, якщо $t = 6$ с

Розв'язання:

$$v(t) = s'(t) = t^2 - 6t + 2$$

$$v(6) = 6^2 - 6 \cdot 6 + 2 = 2$$

Відповідь: 2 м/с

- 3) (2 б) Знайдіть похідну функції: $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 5}$

Розв'язання:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3(x^2 - 5) - 3x \cdot 2x}{(x^2 - 5)^2} = \frac{3x^2 - 15 - 6x^2}{(x^2 - 5)^2} = \frac{-3x^2 - 15}{(x^2 - 5)^2} \\ &= -\frac{3(x^2 + 5)}{(x^2 - 5)^2} \end{aligned}$$

Відповідь: $f'(x) = -\frac{3(x^2 + 5)}{(x^2 - 5)^2}$

- 4) (3 б) Площа прямокутника 25 м². Якими повинні бути сторони цього прямокутника, щоб його периметр був найменшим?

А) Задайте формулою функцію для якої необхідно буде знайти точку мінімуму.

Б) Знайдіть сторони довжин прямокутника, що задовольняють умову завдання.

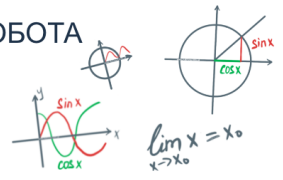
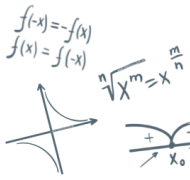
Розв'язання:

Так як площа прямокутника 25 м², то цю площу через змінну x можна виразити так:

$$S = x \cdot \frac{25}{x} = 25$$

Так як сторони прямокутника x і $\frac{25}{x}$, то його периметр:

$$\begin{aligned} \text{А) } P &= 2 \left(x + \frac{25}{x} \right) = 2x + \frac{50}{x} \\ D(P): x &> 0 \end{aligned}$$



Похідна та її застосування.

$$P' = 2 + 50 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2 - \frac{50}{x^2}$$

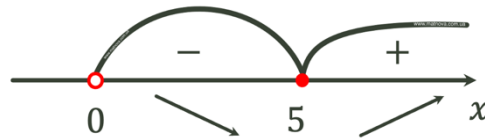
$$2 - \frac{50}{x^2} = 0$$

$$\frac{50}{x^2} = 2$$

$$x^2 = 25$$

$$x_1 = 5$$

$x_1 = -5$, не задовольняє умову



$$x_{\min} = -5$$

Б) Отже сторони прямокутника:

$$x = 5$$

$$\frac{25}{5} = 5$$

Відповідь: А) $P = 2x + \frac{50}{x}$; Б) Сторони прямокутника 5 м, 5 м.

- 5) (3 б) Дослідіть функцію $f(x) = x^3 - 3x^2 + 12$ на парність, проміжки монотонності, знайдіть точки екстремуму та екстремуми функції. Побудуйте графік цієї функції.

Розв'язання:

$$D(f): x \in \mathbb{R}$$

Парність:

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 12 = -x^3 - 3x^2 + 12$$

Функція індиферентна.

Проміжки монотонності, точки екстремуму:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$3x^2 - 6x = 0$$

$$3x(x - 2) = 0$$

$$3x = 0 \quad \text{або} \quad x - 2 = 0$$

$$x = 0 \quad \quad \quad x = 2$$



$$x_{\max} = 0$$

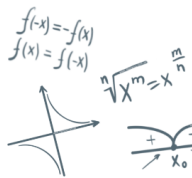
$$x_{\min} = 2$$

Функція зростає на проміжках:

$$x \in (-\infty; 0], [2; +\infty)$$

Функція спадає на проміжку:

$$x \in [0; 2]$$

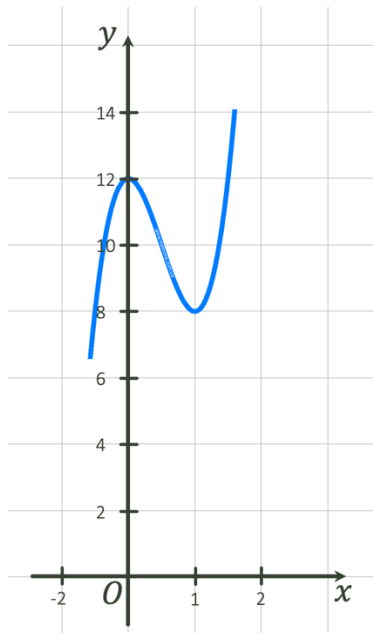


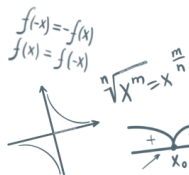
Похідна та її застосування.

Знайдемо *екстремуми функції* (значення функції в її точках екстремуму):

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 12 = 12$$

$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 12 = 8 - 12 + 12 = 8$$





Похідна та її застосування.

II Варіант

- 1) (2 б) Знайдіть похідну функції $f(x) = x^7 - \frac{1}{3}x^6 + 4x^3 + 5x + 8$

Відповідь:

$$f'(x) = 7x^6 - 2x^5 + 12x^2 + 5$$

- (2 б) Задано функцію $f(x) = x^5 - 6x^3 + \frac{x^2}{2} - 10$. Визначте кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Розв'язання:

$$f'(x) = 5x^4 - 18x^2 + x$$

$$f'(1) = 5 \cdot 1^4 - 18 \cdot 1^2 + 1 = -12$$

Відповідь: $k = -12$

- 3) (2 б) Знайдіть похідну функції: $f(x) = \sqrt{x}(4x - 2)$

Розв'язання:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (4x - 2) + 4 \cdot \sqrt{x} = \frac{2(2x - 1)}{2\sqrt{x}} + \frac{4x}{\sqrt{x}} = \frac{2x - 1}{\sqrt{x}} + \frac{4x}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{2x - 1 + 4x}{\sqrt{x}} = \frac{6x - 1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Відповідь: $f'(x) = \frac{6x - 1}{\sqrt{x}}$

- 4) (3 б) Якими мають бути сторони прямокутника з периметром 80 м, щоб його площа була найбільшою?

А) Задайте формулою функцію для якої необхідно буде знайти точку максимуму.

Б) Знайдіть сторони довжин прямокутника, що задовольняють умову завдання.

Розв'язання:

$$P = 2(a + b)$$

$$80 = 2(a + b)$$

$$a + b = 40 \text{ (сума двох сторін)}$$

Нехай одна сторона дорівнює x , тоді друга сторона $40 - x$, тоді його площа:

$$А) \quad S = x(40 - x) = 40x - x^2$$

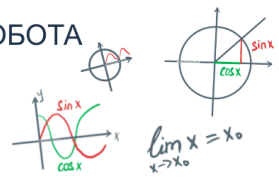
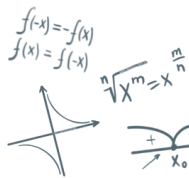
$$D(S): x > 0$$

$$S' = 40 - 2x$$

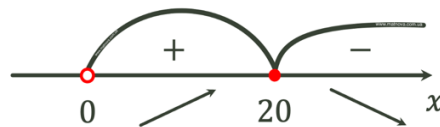
$$40 - 2x = 0$$

$$2x = 40$$

$$x = 20$$



Похідна та її застосування.



$$x_{\max} = 20$$

Б) Отже сторони прямокутника:

$$x = 20$$

$$40 - x = 40 - 20 = 20$$

Відповідь: А) $S = 40x - x^2$; Б) Сторони прямокутника 20 м, 20 м.

- 5) (3 б) Дослідіть функцію $f(x) = 2x^3 - 6x - 2$ на парність, проміжки монотонності, знайдіть точки екстремуму та екстремуми функції. Побудуйте графік цієї функції.

Розв'язання:

$$D(f): x \in \mathbb{R}$$

Парність:

$$f(-x) = 2 \cdot (-x)^3 - 6(-x) - 2 = -2x^3 + 6x - 2$$

Функція індиферентна.

Проміжки монотонності, точки екстремуму:

$$f'(x) = 6x^2 - 6$$

$$6x^2 - 6 = 0$$

$$6(x^2 - 1) = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -1$$



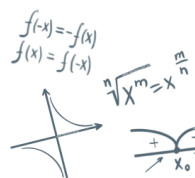
$$x_{\max} = -1$$

$$x_{\min} = 1$$

Знайдемо екстремуми функції (значення функції в її точках екстремуму):

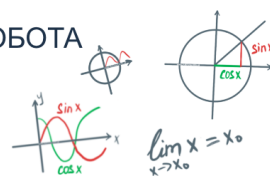
$$f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1) - 2 = -2 + 6 - 2 = 2$$

$$f(1) = 2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1 - 2 = 2 - 6 - 2 = -6$$



АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС

КОНТРОЛЬНА РОБОТА



Похідна та її застосування.

