Тема: Застосування похідної до дослідження функцій і побудови їх графіків.
Мета:

- *Навчальна:* узагальнити та закріпити знання учнів з теми «Похідна та її застосування».
- *Розвиваюча:* розвивати вміння досліджувати функцію для побудови її орієнтовного графіка.
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук;

Тип уроку: засвоєння нових знань;
Обладнання: конспект, презентація, мультимедійне обладнання;

Хід уроку

I. Організаційний етап

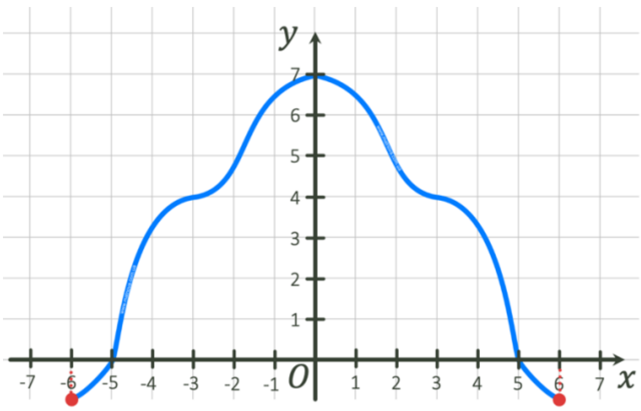
- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

II. Актуалізація опорних знань

// Дослідимо функцію за її графіком

➢ Для дослідження будемо використовувати такий ***орієнтовний алгоритм***:

1. **$D(f)$**
2. **Парність**
3. **Нулі функції**
4. **Зростання та спадання**
5. **Точки екстремуму**
6. **Інші особливості (періодичність, поведінка в околах окремих точок)**



1. $D(f): x \in [-6; 6]$
2. Парна
   (Оскільки графік симетричний відносно осі ординат)
3. Нулі функції:
   $x = -5, x = 5$
   (Оскільки графік перетинає вісь абсцис в точках $x = -5, x = 5$)
4. Зростає при
   $x \in [-6; 0]$
   (Оскільки на цьому проміжку більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції)
   Спадає при

$x \in [0; 6]$

(Оскільки на цьому проміжку більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції)

5. $x_{\max} = 0$

(Оскільки в цій точці похідна функції змінює знак з «+» на «−», тобто зростає до т. $x = 0$*, а потім спадає від т.* $x = 0$*, якщо рухатися у напрямі зростання аргументу)*

III. Вивчення нового матеріалу

// Побудуємо графік функції за її формулою

Завдання 1

Дослідіть функцію $f(x) = 4x^2 - x^4$ та побудуйте її графік.

Розв'язання:

1. $D(f): x \in \mathbb{R}$
   Область визначення даної функції – множина всіх дійсних чисел.

2. $f(-x) = 4(-x)^2 - (-x)^4 = 4x^2 - x^4 = f(x)$
   Отже, дана фунція парна.

3. Знайдемо нулі даної функції *(точки перетину з осями координат)*:

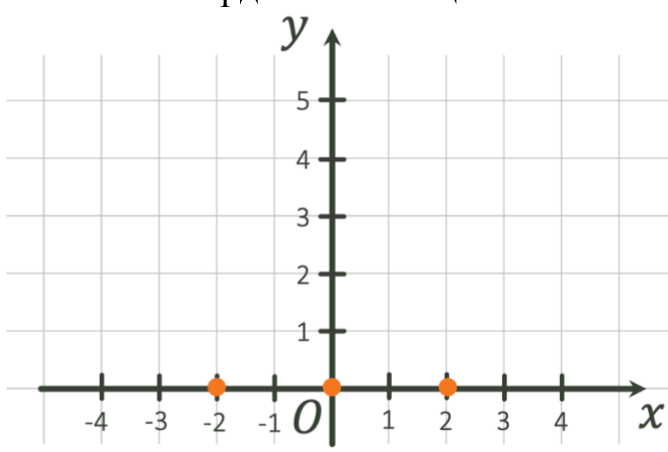
$4x^2 - x^4 = 0$

$x^2\,(4 - x^2) = 0$

$x = 0$ або $x^2 = 4$

$x = \pm 2$

Можемо позначити нулі функції на координатні площині:



4. Знайдемо проміжки зростання та спадання функції. Для цього скористаємось похідною функції.

$f'(x) = 8x - 4x^3$

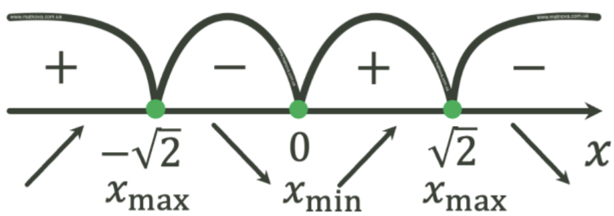
$8x - 4x^3 = 0$

$4x(2 - x^2) = 0$

$x = 0$ або $x^2 = 2$

$x = \pm\sqrt{2}$

Дослідимо отримані *точки екстремуму* функції:



5. Точки екстремуму:

$x_{\max} = -\sqrt{2}$
$x_{\max} = \sqrt{2}$
$x_{\min} = 0$

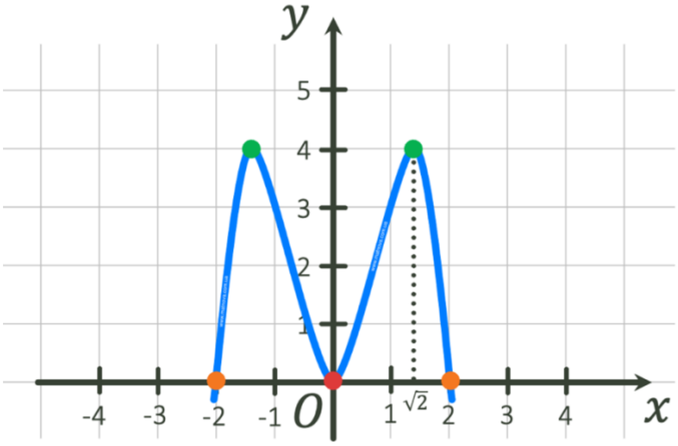
Знайдемо *екстремуми функції* (значення функції в її точках екстремуму):

$f(0) = 4 \cdot 0^2 - 0^4 = 0$

$f(\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) = 4(-\sqrt{2})^2 - (-\sqrt{2})^4 = 8 - 4 = 4$

Позначимо нулі функції і точки екстремуму на координатній площині та побудуємо орієнтовний графік функції

$f(x) = 4x^2 - x^4$



IV. Розв'язування завдань

№1

Дослідіть функцію та побудуйте її графік:

1) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$ 2) $f(x) = x^3 - 3x^2$
3) $f(x) = x^2 - 2x + 5$

Розв'язання:

1) $\boldsymbol{f(x) = x^4 - 6x^2 + 5}$

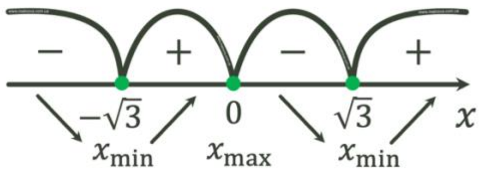
1. $D(f)\colon x \in \mathbb{R}$
2. $f(-x) = (-x)^4 - 6(-x)^2 + 5 = x^4 - 6x^2 + 5 = f(x)$
   Функція парна.
3. Нулі функції.
   $x^4 - 6x^2 + 5 = 0$
   Нехай $x^2 = t$, тоді:
   $t^2 - 6t + 5 = 0$
   За т.Вієта:
   $t_1 = 5$
   $t_2 = 1$
   $x^2 = 5$ або $x^2 = 1$
   $x = \pm\sqrt{5}$ $x = \pm 1$
4. Знайдемо проміжки зростання та спадання функції.
   $f'(x) = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3)$

$4x(x^2-3)=0$

$4x=0$ або $x^2-3=0$

$x=0$ $x^2=3$

$x=\pm\sqrt{3}$



5. Точки екстремуму та екстремуми функції

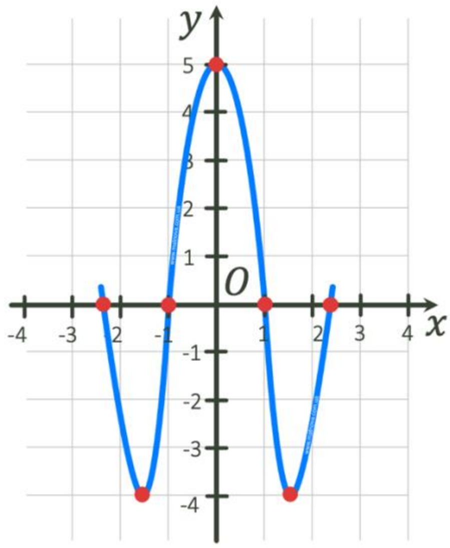
Знайдемо екстремуми функції:

$f(0)=0^4-6\cdot 0^2+5=5$

$f(-\sqrt{3})=(-\sqrt{3})^4-6(-\sqrt{3})^2+5$
$=9-18+5=-4$

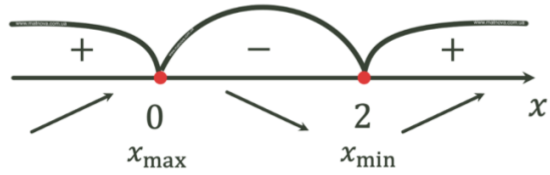
$f(-\sqrt{3})=f(\sqrt{3})=-4$

Позначимо нулі функції і точки екстремуму на координатній площині та побудуємо орієнтовний графік функції
$f(x)=x^4-6x^2+5$



2) $\boldsymbol{f(x)=x^3-3x^2}$

1. $D(f): x\in\mathbb{R}$
2. $f(-x)=(-x)^3-3\cdot(-x)^2=-x^3-3x^2$
   Функція індиферентна.
3. Нулі функції
   $x^3-3x^2=0$
   $x^2(x-3)=0$
   $x^2=0$ або $x-3=0$
   $x=0$ $x=3$
4. Знайдемо проміжки зростання та спадання функції.
   $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$
   $3x(x-2)=0$
   $3x=0$ або $x-2=0$
   $x=0$ $x=2$



5. Точки екстремуму:

$x_{\max} = 0, x_{\min} = 2$

Знайдемо екстремуми функції:

$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0$ *(бачимо, що графік функції проходить через початок координат)*

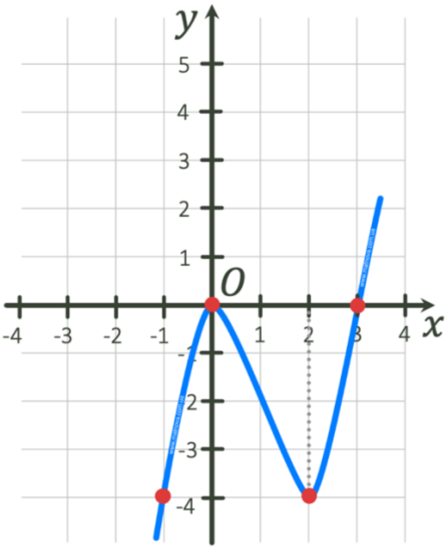
$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = 8 - 12 = -4$

6. Знайдемо додаткові точки:

x	-1	-2	4
y	-4	-20	16

Позначимо нулі функції і точки екстремуму на координатній площині та побудуємо орієнтовний графік функції

$f(x) = x^3 - 3x^2$



3) $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 2x + 5}$

1. $D(f): x \in \mathbb{R}$
2. $f(-x) = (-x)^2 - 2 \cdot (-x) + 5 = x^2 + 2x + 5$

   Функція індиферентна.

3. Нулі функції

I спосіб

Очевидно, що перед нами графік параболи, тому можемо знайти координати її вершини за вже відомими формулами. Так ми одразу дізнаємось, чи має дана функція нулі, а також знайдемо її точку екстремуму – вершину параболи.

$$x_в = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y_в = 1^2 - 2 \cdot 1 + 5 = 4$$

Оскільки координати вершини параболи $(1; 4)$, то дана функція не має нулів.

II спосіб

$x^2 - 2x + 5 = 0$

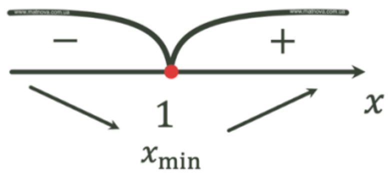
$D = b^2 - 4ac = 4 - 20 = -16$

Оскільки $D < 0$ $\rightarrow$ нулів не має.

4. Знайдемо проміжки зростання та спадання функції.

Так як гілки параболи направлені вгору (коефіцієнт біля x^2 має додатний знак), то вершина параболи – точка мімінуму, тому:

$f'(x) = 2x - 2$
$2x - 2 = 0$
$2x = 2$
$x = 1$



5. Точки екстремуму та екстремуми функції

Оскільки координати вершини параболи $(1; 4)$, то:

$x_{\min} = 1$
$y_{\min} = 4$

$x_{\min} = 1$
$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 5 = 4$

6. Допоміжні точки

Знаючи напрямок віток і координати вершини параболи – легко можна побудувати параболу. Для цього просто від вершини параболи ставимо «стандартні точки», як от «одна одиниця ліворуч і одна вгору», «дві одиниці ліворуч і чотири вгору», а також аналогічні точки праворуч від вершини.

Так як нулів нема, то з’ясуємо, чи перетинає даний графік вісь ординат.

Oy:
$x = 0$
$y = 0^2 - 2 \cdot 0 + 5 = 5$

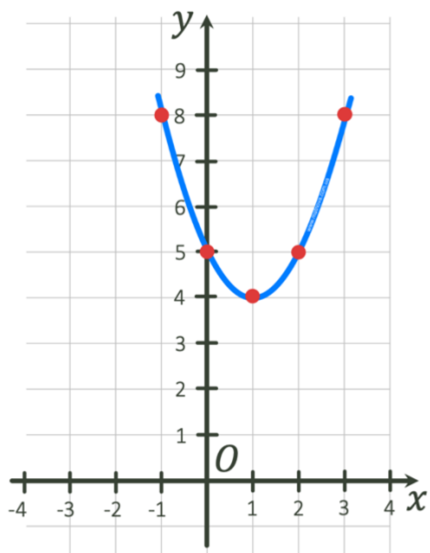
Координати перетину з віссю ординат $(0; 5)$

Знайдемо допоміжні точки:

x	-1	3
y	8	8

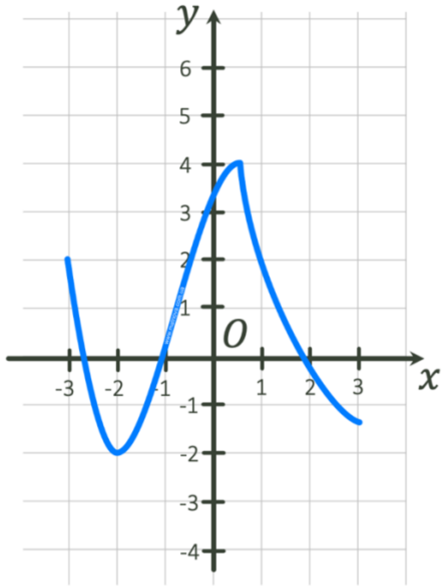
Побудуємо орієнтовний графік функції
$f(x) = x^2 - 2x + 5$

$E(f): y \in [4; +\infty)$



V. Підсумок уроку

- Опишіть орієнтовний алгоритм дослідження функції для побудови її графіка
- Поясніть, скільки коренів має дана функція, чому?
  (3 корені, так як вона має 2 нулі)
- Поясніть, скільки точок екстремуму має дана функція, чому?
  (2 точки екстремуму, маємо тільки дві точки, в яких функція змінює знак похідної)
- Якою є множина значень даної функції, чому?
  $E(f): y \in [-2; 4]$
- Назвіть область визначення даної функції
  $D(f): x \in [-3; 3]$



VI. Домашнє завдання

Опрацювати §23, опрацювати конспект — О.С. Істер
Виконати № 23.2 (1,4); 23.4 (1); 23.6 (1)

Опрацювати п.24-25, опрацювати конспект. — А.Г. Мерзляк
Виконати № 24.2; 25.2