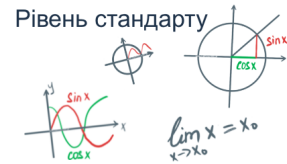


# МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



**Тема:** Екстремуми функції

**Мета:**

- *Навчальна:* закріпити поняття околу точки; сформувати поняття точок екстремуму та екстремумів функції; засвоїти необхідну і достатню умови екстремуму; засвоїти алгоритм знаходження точок екстремуму та екстремумів функції.
- *Розвиваюча:* розвивати вміння знаходити точки екстремуму та екстремуми функції;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук;

**Тип уроку:** засвоєння нових знань;

**Обладнання:** конспект, презентація, мультимедійне обладнання;

## Хід уроку

### I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

### II. Вивчення нового матеріалу

// Що таке точки екстремуму і екстремуми функції?

➤ Що таке околу точки?

*Окіл точки* - це такий проміжок, який містить цю точку.

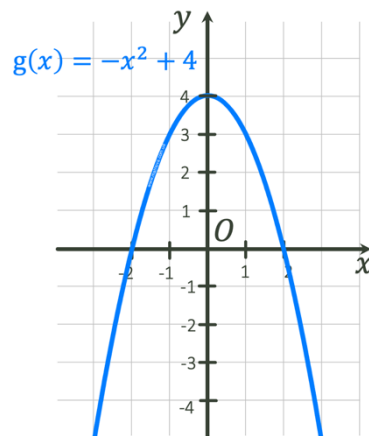
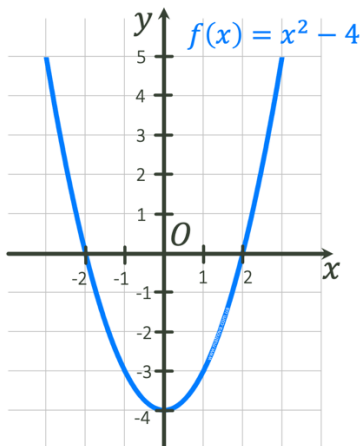


(3; 5) - околу т. 4

Інші приклади околу т. 4:

(-7; 12) [1; 8] [0; 10]

➤ Знайдіть критичні точки даних функцій:



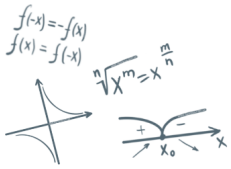
Знайдемо похідні даних функцій та прирівняємо їх до нуля:

$$f'(x) = 2x = 0$$

$$x = 0$$

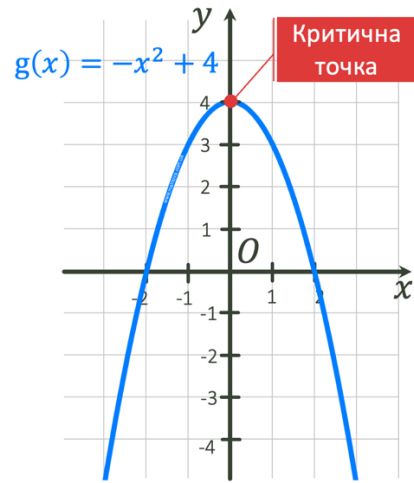
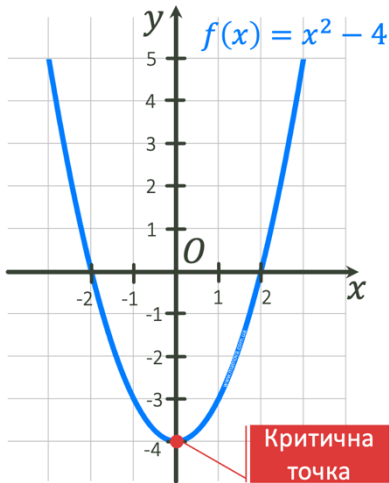
$$g'(x) = -2x = 0$$

$$x = 0$$

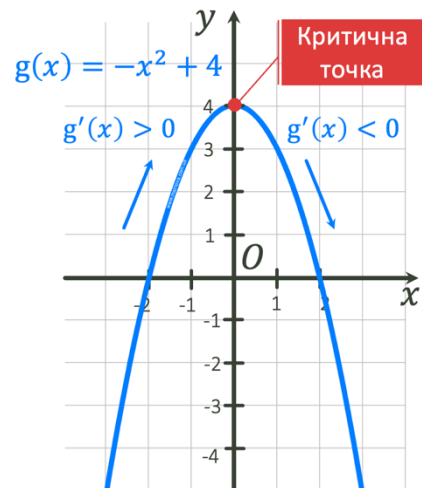
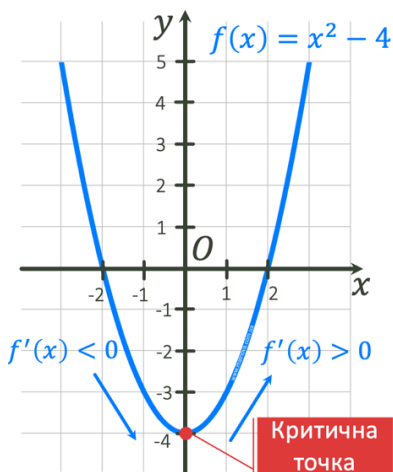


# МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



➤ Назвіть проміжки зростання і спадання даних функцій



Спадає на проміжку  $x \in (-\infty; 0]$   
Зростає на проміжку  $x \in [0; +\infty)$

Зростає на проміжку  $x \in (-\infty; 0]$   
Спадає на проміжку  $x \in [0; +\infty)$

➤ В чому відмінність даних критичних точок?

В критичній точці функції  $y = f(x)$  похідна змінює свій знак з «-» на «+», а похідна функції  $y = g(x)$  змінює знак з «+» на «-»

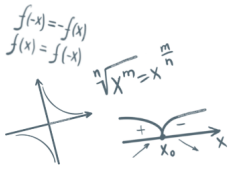
**Точки екстремуму** – це такі точки, в яких похідна функції змінює знак на протилежний.

**Екстремуми функції** – це значення функції в точках екстремуму.

➤ Для обох функцій назвіть точки екстремуму та екстремуми функцій.

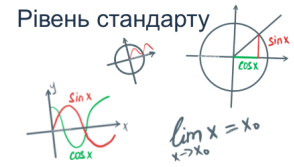
$y = f(x)$  має одну точку екстремуму:  
 $x = 0$   
і відповідно одне значення екстремуму функції:  
 $y = -4$

$y = g(x)$  має одну точку екстремуму:  
 $x = 0$   
і відповідно одне значення екстремуму функції:  
 $y = 4$



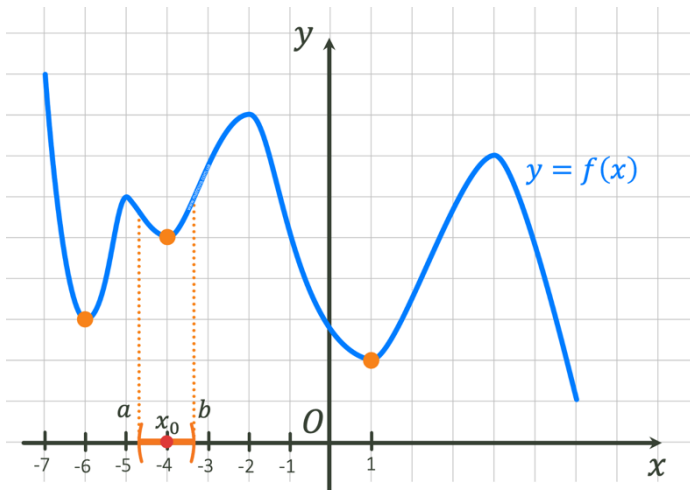
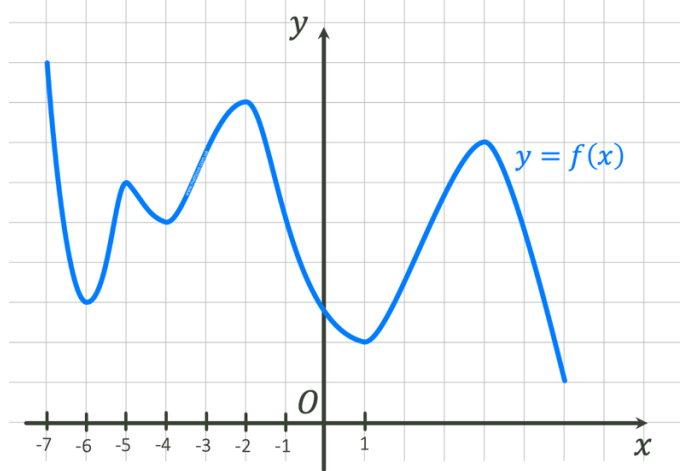
# МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



## // Точки максимуму і мінімуму функції

➤ Розглянемо функцію  $y = f(x)$

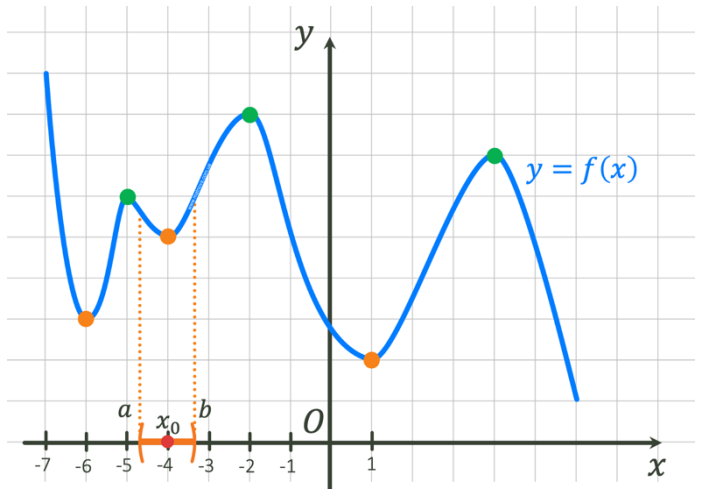


### Точки мінімуму функції

Точка  $x_0$  - *точка мінімуму функції*  $y = f(x)$ , якщо для  $\forall x$  з околу т.  $x_0$   
 $f(x_0) < f(x)$

### Точки максимуму функції

Точка  $x_0$  - *точка максимуму функції*  $y = f(x)$ , якщо для  $\forall x$  з околу т.  $x_0$   
 $f(x_0) > f(x)$



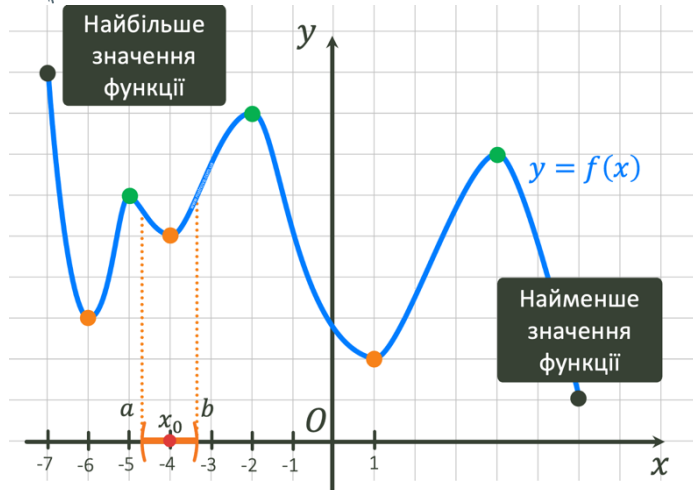
$$f(-x) = -f(x)$$

$$f(x) = f(-x)$$

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

# МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



Точки мінімуму і точки максимуму – це не те саме, що і найбільше або найменше значення функції.

➤ Як не маючи графіка функції знайти його точки екстремуму?

**Точками екстремуму можуть бути тільки критичні точки.**

➤ Як визначити, яка зі знайдених критичних точок є точкою мінімуму, а яка – максимуму?

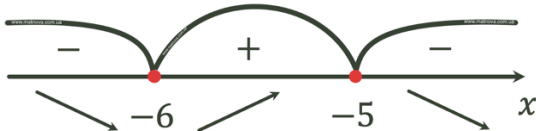
Будемо рухатись у напрямі зростання аргументу деякого околу т.  $x_0$ , тоді:

**Якщо похідна функції змінює знак з «-» на «+», то  $x_0$  - точка мінімуму.**

**Якщо похідна функції змінює знак з «+» на «-», то  $x_0$  - точка максимуму.**

## ПРИКЛАД

Дослідимо  $y = f(x)$  на проміжку  $(-7; -4,5)$ :



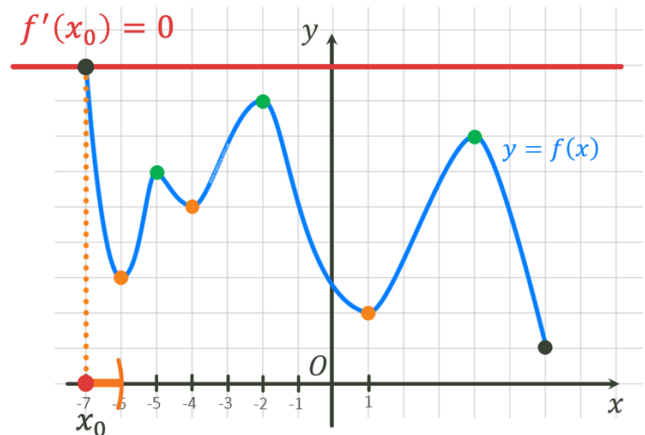
$$x_{\min} = -6$$

$$x_{\max} = -5$$

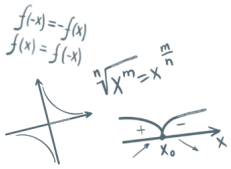
Отже, можемо сформулювати необхідну і достатню умови екстремуму функції:

**Необхідна умова екстремуму** (відома як теорема Ферма):

Якщо т.  $x_0$  – точка екстремуму функції  $f(x)$  і в цій точці існує похідна  $f'(x_0)$ , то  $f'(x_0) = 0$ .

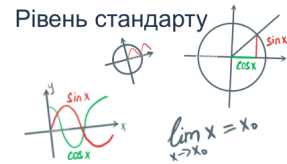


Як бачимо, дана умова не завжди означає, що  $x_0$  - точка екстремуму.



# МАТЕМАТИКА НОВА

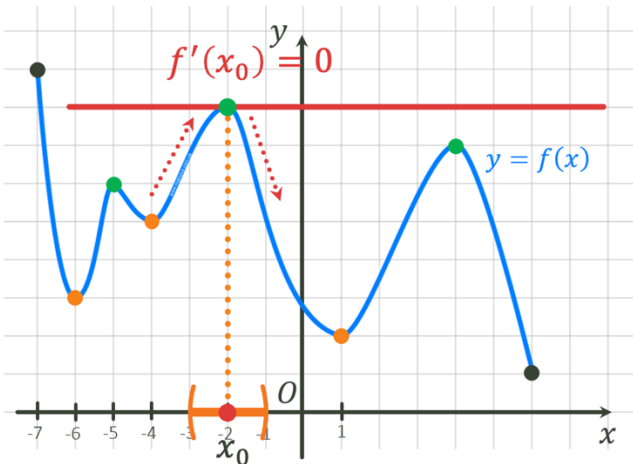
АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



## Достатня умова екстремуму:

Нехай  $x_0$  – критична точка функції  $f(x)$ , яка є неперервною в цій точці та існує проміжок  $(a; b)$  в якому функція  $f(x)$  має похідну (в самій т.  $x_0$  може не мати), тоді:

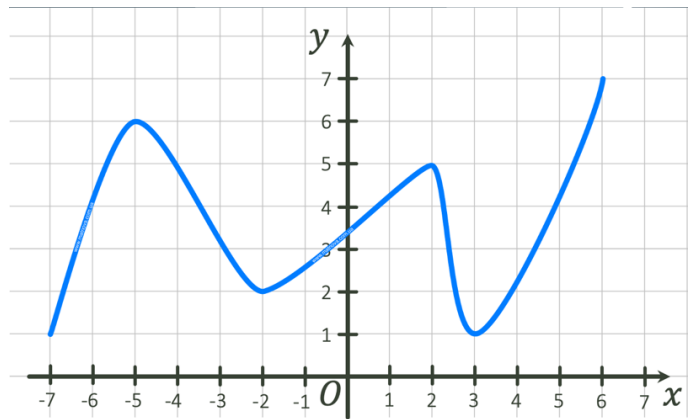
- 1) Якщо  $f'(x) < 0$  на проміжку  $(a; x_0)$  і  $f'(x) > 0$  на проміжку  $(x_0; b)$ , то  $x_0$  – **точка мінімуму** функції  $f(x)$ .
- 2) Якщо  $f'(x) > 0$  на проміжку  $(a; x_0)$  і  $f'(x) < 0$  на проміжку  $(x_0; b)$ , то  $x_0$  – **точка максимуму** функції  $f(x)$ .



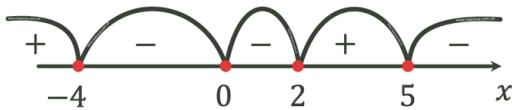
## III. Розв'язування завдань

№1

1.1 За даним графіком функції  $y = f(x)$  знайдіть її точки екстремуму та екстремуми. Які точки є точками мінімуму, а які – максимуму?



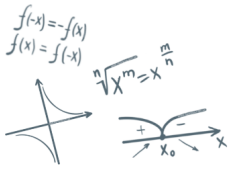
**Відповідь:**  $x_{\min} = -2,$   
 $x_{\min} = 3,$   
 $x_{\max} = 2,$   
 $x_{\max} = 5.$



На рисунку зображено знаки похідної функції  $y = g(x)$ , визначеної на  $\mathbb{R}$ . Назвіть точки мінімуму та максимуму цієї функції.

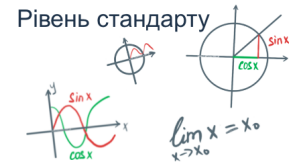
1.2

**Відповідь:**  $x_{\max} = -4, x_{\min} = 2,$   
 $x_{\max} = 5$



# МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



№2

Знайдіть точки мінімуму і точки максимуму функції  $y = f(x)$ :

1)  $f(x) = x(x - 7)$

2)  $f(x) = 4 + 27x - x^3$

3)  $f(x) = \frac{2}{x} - 27x^2$

4)  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 7}$

**Розв'язання:**

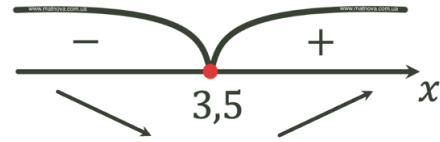
1)  $f(x) = x(x - 7) = x^2 - 7x$

$f'(x) = 2x - 7$

$2x - 7 = 0$

$2x = 7$

$x = \frac{7}{2} = 3,5$



**Відповідь:**  $x_{\min} = 3,5$

2)  $f(x) = 4 + 27x - x^3$

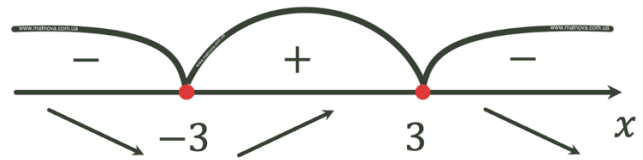
$f'(x) = 27 - 3x^2$

$27 - 3x^2 = 0$

$3x^2 = 27$

$x^2 = 9$

$x = \pm 3$



**Відповідь:**  $x_{\min} = -3, x_{\max} = 3$

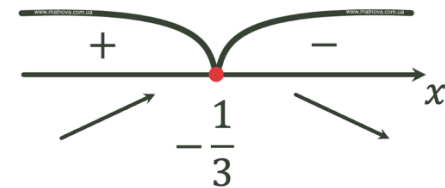
3)  $f(x) = \frac{2}{x} - 27x^2$

$D(f): x \neq 0$

$f'(x) = -\frac{2}{x^2} - 54x$

$= \frac{-2 - 54x^3}{x^2}$

$= \frac{-2(27x^3 + 1)}{x^2}$



**Відповідь:**  $x_{\max} = -\frac{1}{3}$

$D'(f): x \neq 0$

$\frac{-2(27x^3 + 1)}{x^2} = 0$

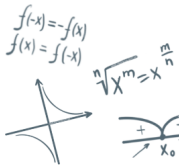
$-2(27x^3 + 1) = 0$

$27x^3 + 1 = 0$

$27x^3 = -1$

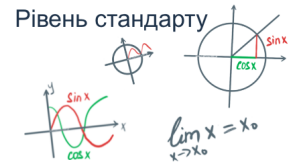
$x^3 = -\frac{1}{27}$

$x = -\frac{1}{3}$



# МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



4)

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 7}$$

$$D(f): x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 7) - x \cdot 2x}{(x^2 + 7)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 7 - 2x^2}{(x^2 + 7)^2}$$

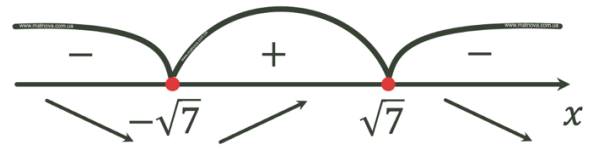
$$= \frac{-x^2 + 7}{(x^2 + 7)^2}$$

$$\frac{-x^2 + 7}{(x^2 + 7)^2} = 0$$

$$-x^2 + 7 = 0$$

$$x^2 = 7$$

$$x = \pm\sqrt{7}$$



**Відповідь:**  $x_{\min} = -\sqrt{7}, x_{\max} = \sqrt{7}$

№3

*\*Учням пропонується самостійно виконати завдання.*

Завдання можна виконувати самостійно або об'єднайтесь у групи не більше 4-х осіб.

1) Побудуйте ескіз графіка функції  $y = f(x)$ , що має наступні властивості:

А)  $D(f): x \in (-4; 5)$

Б)  $f'(x) < 0$  при  $x \in (-4; 1)$

В)  $f'(x) > 0$  при  $x \in (1; 5)$

Запишіть точки мінімуму та максимуму даної функції.

2) Знайдіть точки екстремуму та екстремуми функції:

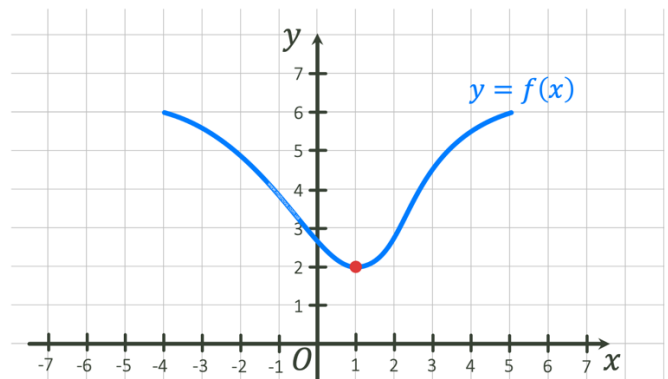
А)  $f(x) = \frac{x^2}{9} + \frac{4}{x^2}$

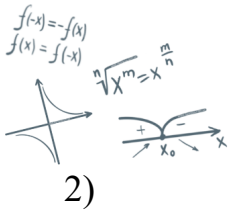
Б)  $f(x) = x^3 - 6x^2$

**Розв'язання:**

1)  $x_{\min} = 1$

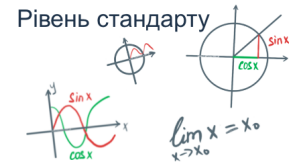
Точнок максимуму немає.





# МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



2)

A)  $f(x) = \frac{x^2}{9} + \frac{4}{x^2}$

$D(f): x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{1}{9} \cdot 2x + 4 \cdot \left(-\frac{2}{x^3}\right) = \frac{2x}{9} - \frac{8}{x^3} = \frac{2x^4 - 72}{9x^3} = \frac{2(x^4 - 36)}{9x^3}$$

$$= \frac{2(x^2 - 6)(x^2 + 6)}{9x^3}$$

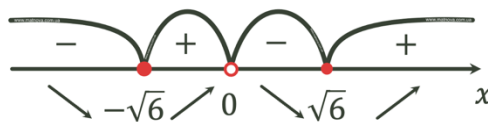
$$\frac{2(x^2 - 6)(x^2 + 6)}{9x^3} = 0$$

$$2(x^2 - 6)(x^2 + 6) = 0$$

$$x^2 - 6 = 0 \quad \text{або} \quad x^2 + 6 = 0$$

$$x^2 = 6 \quad \quad \quad x^2 = -6$$

$$x = \pm\sqrt{6} \quad \quad \quad \emptyset$$



$$x_{\min} = -\sqrt{6}$$

$$x_{\min} = \sqrt{6}$$

$$y_{\min} = f(-\sqrt{6}) = \frac{(-\sqrt{6})^2}{9} + \frac{4}{(-\sqrt{6})^2} = \frac{6}{9} + \frac{4}{6} = \frac{12 + 12}{18} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$$

$$y_{\min} = f(\sqrt{6}) = \frac{(\sqrt{6})^2}{9} + \frac{4}{(\sqrt{6})^2} = \frac{6}{9} + \frac{4}{6} = \frac{4}{3}$$

**Відповідь:**  $x_{\min} = -\sqrt{6}$ ,  $x_{\min} = \sqrt{6}$ ,  $y_{\min} = \frac{4}{3}$

B)  $f(x) = x^3 - 6x^2$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$$

$$3x(x - 4) = 0$$

$$3x = 0 \quad \text{або} \quad x - 4 = 0$$

$$x = 0 \quad \quad \quad x = 4$$



$$x_{\max} = 0$$

$$x_{\min} = 4$$

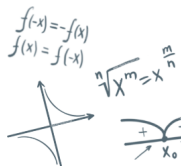
$$y_{\max} = f(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 = 0$$

$$y_{\min} = f(4) = 4^3 - 6 \cdot 4^2 = 64 - 96 = -32$$

**Відповідь:**  $x_{\max} = 0$ ,  $x_{\min} = 4$ ,  $y_{\max} = 0$ ,  $y_{\min} = -32$

## IV. Підсумок уроку

- Поясніть, що таке окіл точки?



# МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



- Поясніть, що таке точки екстремуму і що таке екстремум функції?
- Поясніть, що таке точка мінімуму функції?
- Поясніть, що таке точка максимуму функції?

## V. Домашнє завдання

Опрацювати §22, опрацювати конспект.

О.С. Істер

Виконати № 22.5, 22.8 (3, 4), 22.10(1-2), 22.12 (2), 22.16.

Опрацювати п.23 (стор.123).

А.Г. Мерзляк

Виконати № 23.2, 23.4, 23.6.