

МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



Тема: Ознаки сталості, зростання та спадання функції.

Мета:

- *Навчальна:* увести ознаки сталості, зростання та спадання функції;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння досліджувати функцію за допомогою ознак сталості, зростання та спадання функції; розвивати вміння знаходити критичні точки функції;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук;

Тип уроку: засвоєння нових знань;

Обладнання: конспект, презентація, мультимедійне обладнання;

Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

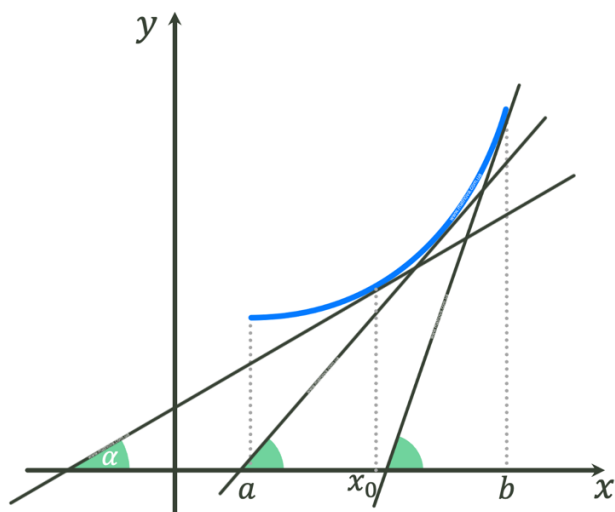
II. Вивчення нового матеріалу

// **Ознаки сталості, зростання та спадання функції**

- Пригадайте, яка функція називається зростаючою, а яка – спадною?
- Розглянемо зростаючу і спадну функції на проміжку $(a; b)$.

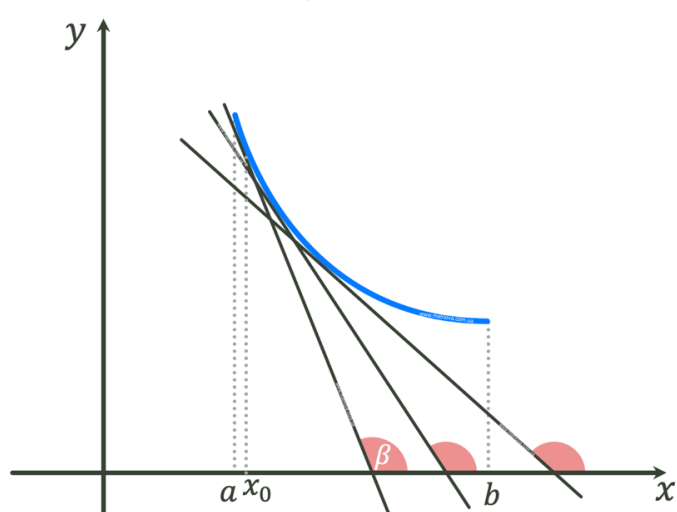
Бачимо, що в якій би точці цього проміжку ми не будували дотичні до графіків, їх коефіцієнти завжди або додатними, або від'ємними. Відповідно похідні даних функції в кожній точці з проміжку $(a; b)$ завжди будуть або додатними, або від'ємними – це дозволяє нам сформулювати ознаки сталості, зростання та спадання функції.

ЗРОСТАЮЧА
функція

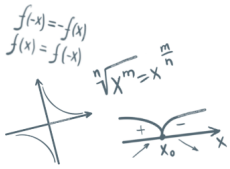


$\angle \alpha$ – завжди гострий
 $\operatorname{tg} \alpha > 0$
 $f'(x_0) > 0$

СПАДНА
Функція



$\angle \beta$ – завжди тупий
 $\operatorname{tg} \beta < 0$
 $f'(x_0) < 0$

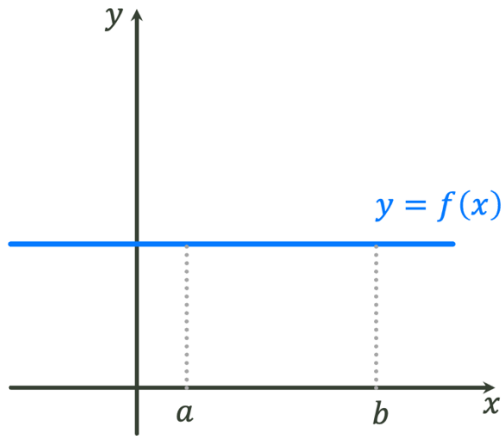


МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС

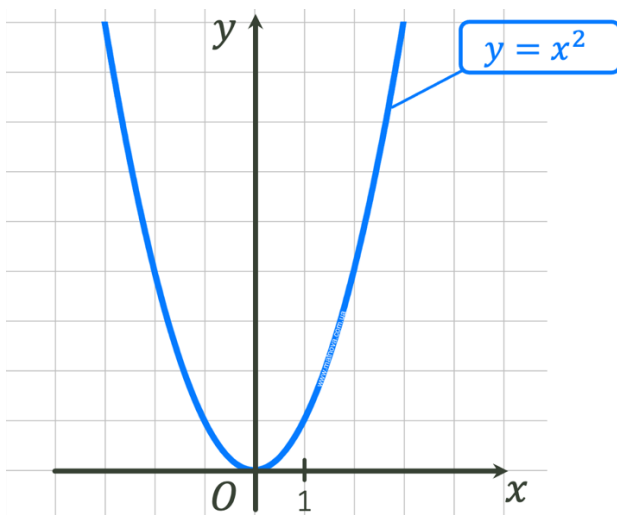


Отже, сформулюємо **ознаки монотонності** функції $f(x)$ на проміжку $(a; b)$:



- 1) Якщо $f'(x) > 0$, то $f(x)$ зростає
- 2) Якщо $f'(x) < 0$, то $f(x)$ спадає

- 3) Якщо $f'(x) = 0$, то $f(x)$ стала

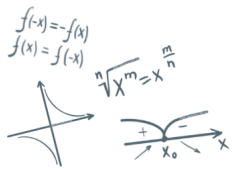


Для наочного прикладу, дослідимо функцію $y = x^2$ на проміжки монотонності.

Для дослідження будемо використовувати алгоритм:

- 1) $D(f)$
- 2) $f'(x) = 0$
- 3) Критичні точки
- 4) Знак на кожному проміжку

// Знайдемо область визначення функції
 // Знайдемо похідну даної функції, потім знайдемо її нулі
 // Запишемо всі знайдені критичні точки функції на числовій прямій (точки функції на її області визначення, в яких похідна не існує або дорівнює нулю)
 // Визначимо знак похідної функції на кожному з проміжків, потім за допомогою ознак монотонності функції



МАТЕМАТИКА НОВА

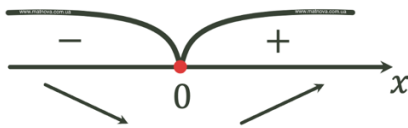
АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



запишемо проміжки зростання і спадання функції

Отже, дослідимо функцію $y = x^2$ на проміжки монотонності:

- 1) $D(f): x \in \mathbb{R}$
- 2) $f'(x) = 2x$
 $2x = 0$
 $x = 0$
- 3) Маємо одну критичну точку: $x = 0$
- 4)



Так як в нас тільки одна критична точка, то отримали два проміжки. Дослідимо знак похідної функції на кожному з проміжків. Для цього достатньо обрати будь-яке число з проміжку і підставити його в похідну.

Проміжок $x \in (-\infty; 0]$

$$f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$$

Отже на цьому проміжку функція монотонно спадає.

Проміжок $x \in [0; +\infty)$

$$f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

Отже на цьому проміжку функція монотонно зростає.

Функція спадає на проміжку $x \in (-\infty; 0]$.

Функція зростає на проміжку $x \in [0; +\infty)$.

Як записати проміжки зростання та спадання функції?

(Кінці проміжків включаємо, якщо функція є диференційовною в цих точках)

$(a; b)$

$[a; b)$

$[a; b]$

Інтервал

Напівінтервал

Відрізок

(закритий ліворуч,
відкритий праворуч)

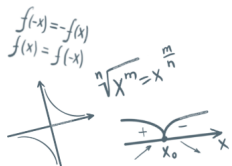
Завдання 1

Знайдіть проміжки зростання і спадання функції, не будуючи її графік.

$$f(x) = x + \frac{32}{x^2}$$

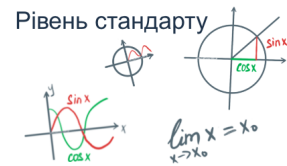
Розв'язання:

- 1) $D(f): x \neq 0$



МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



2)
$$f'(x) = x' + \left(\frac{32}{x^2}\right)' = 1 - \frac{64}{x^3}$$

$$1 - \frac{64}{x^3} = 0$$

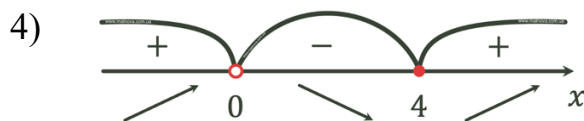
$$x^3 = 64$$

$$x = 4$$

3) Маємо дві критичні точки:

$$x \neq 0$$

$$x = 4$$



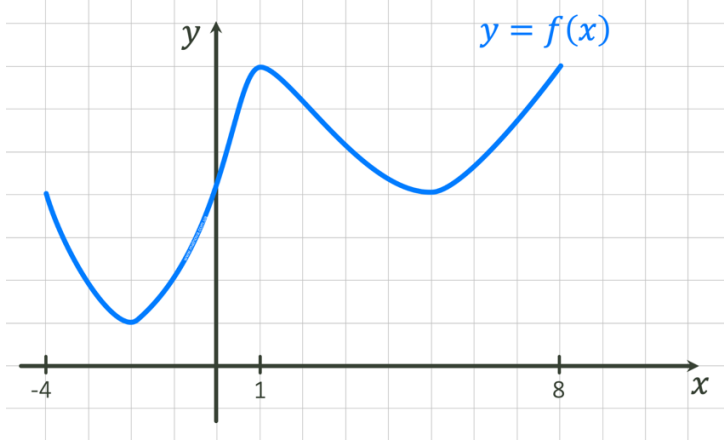
Зростає на проміжках: $x \in (-\infty; 0), [4; +\infty)$

Спадає на проміжку: $x \in (0; 4]$

III. Розв'язування завдань

№1

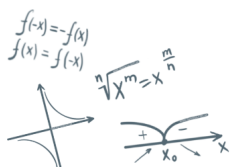
Назвіть проміжки зростання і спадання функції:



Розв'язання:

Спадає на проміжках:
 $x \in [-4; -2], [1; 5]$

Зростає на проміжках:
 $x \in [-2; 1], [5; 8]$



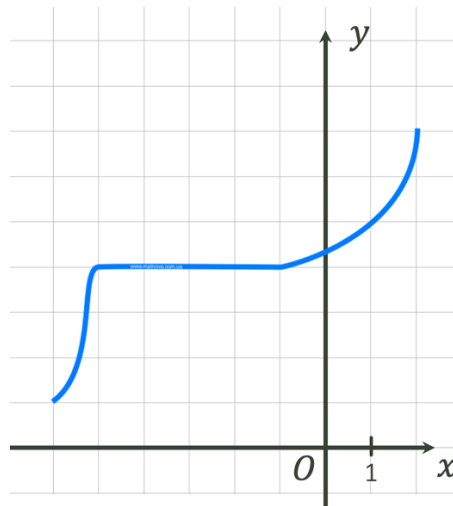
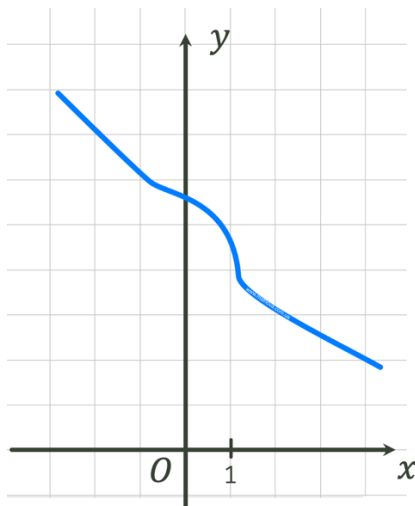
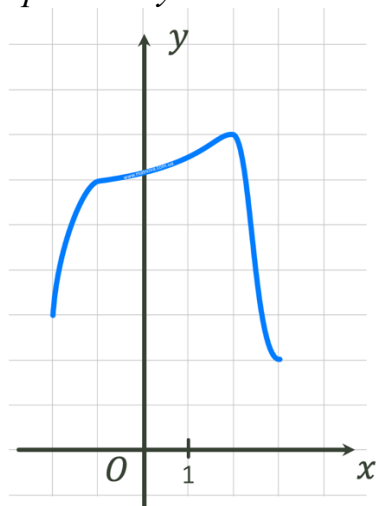
МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



№2

Укажіть проміжки, на яких *похідна функції* є додатною, на яких від'ємною, а на яких дорівнює нулю.



Розв'язання:

$$f'(x) > 0 \text{ при } x \in [-2; 2]$$

$$f'(x) < 0 \text{ при } x \in [2; 3]$$

$$f'(x) < 0 \text{ при } x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) > 0 \text{ при } x \in [-6; -5], [-1; 2]$$

$$f'(x) = 0 \text{ при } x \in [-5; -1]$$

№3

Дослідіть на монотонність функцію:

1) $f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 7$

3) $f(x) = 2x^2(x - 3)$

2) $f(x) = -3x - \cos x$

4) $f(x) = \frac{1}{1 - 4x} + 2$

Розв'язання:

1) $f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 7$

$$D(f): x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 12x^2 + 12x$$

$$12x^2 + 12x = 0$$

$$12x(x + 1) = 0$$



Відповідь: Функція зростає на проміжках $x \in (-\infty; -1], [0; +\infty)$

Функція спадає на проміжку: $x \in [-1; 0]$

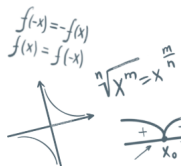
2) $f(x) = -3x - \cos x$

$$D(f): x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = -3 + \sin x$$

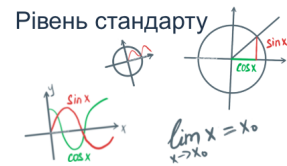
Так як $-1 \leq \sin x \leq 1$, то похідна даної функції завжди буде від'ємною, тому функція спадає на всій області визначення.

Відповідь: Функція спадає на всій області визначення $x \in (-\infty; +\infty)$



МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



3) $f(x) = 2x^2(x - 3) = 2x^3 - 6x^2$

$D(f): x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 6x^2 - 12x$

$6x^2 - 12x = 0$

$6x(x - 2) = 0$

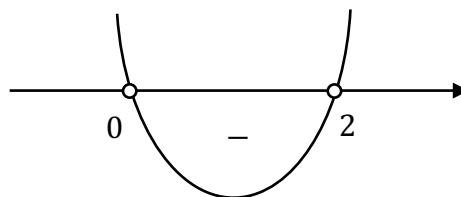
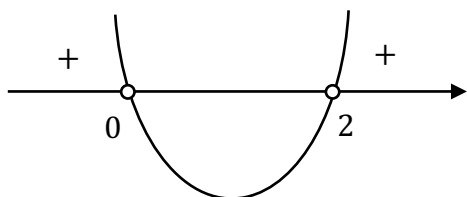
$x_1 = 0$

$x_2 = 2$

Знайдемо проміжки, розв'язавши дві нерівності, але до проміжків будемо включати критичні точки, так як дана функція визначена в них. Це дозволить нам швидше визначити знак на кожному з проміжків.

$6x(x - 2) > 0$

$6x(x - 2) < 0$



Відповідь: Функція зростає на проміжках $x \in (-\infty; 0], [2; +\infty)$

Функція спадає на проміжку: $x \in [0; 2]$

4) $f(x) = \frac{1}{1-4x} + 2 = \frac{1+2-8x}{1-4x} = \frac{3-8x}{1-4x}$

$D(f): x \neq \frac{1}{4}$

$$f'(x) = \left(\frac{3-8x}{1-4x} \right)' = \frac{-8 \cdot (1-4x) - ((3-8x) \cdot (-4))}{(1-4x)^2}$$

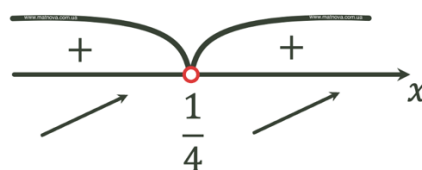
$$= \frac{-8 + 32x + 12 - 32x}{(1-4x)^2} = \frac{4}{(1-4x)^2}$$

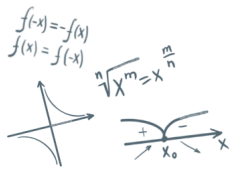
$D'(f): x \neq \frac{1}{4}$

Бачимо, що дана похідна завжди буде більша за нуль (другий степінь в знаменнику). Отже залишається врахувати область визначення функції.

Відповідь:

Функція зростає на проміжках $x \in (-\infty; 0,25), (0,25; +\infty)$





МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



№4

Доведіть, що функція:

1) $f(x) = 4x + \cos 2x$ зростає на $\mathbb{R}$

2) $f(x) = -\frac{2x^3}{3} - 2x$ спадає на $\mathbb{R}$

Доведення:

1) $f(x) = 4x + \cos 2x$ зростає на $\mathbb{R}$

$D(f): x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 4 - 2 \sin 2x$

$4 - 2 \sin 2x = 0$

$2 \sin 2x = 4$

$\sin 2x = \frac{4}{2} = 2$

Коренів немає ($\emptyset$)

Так як $-2 \leq 2 \sin 2x \leq 2$, то вираз $4 - 2 \sin 2x$ не може бути від'ємним.

Перевіримо для значення « $2 \sin 2x = -2$ »:

$4 - (-2) = 6$

Перевіримо для значення « $2 \sin 2x = 2$ »:

$4 - 2 = 2$

Оскільки $-2 \leq 2 \sin 2x \leq 2$, то $f'(x) > 0$ на $\mathbb{R}$, отже $f(x)$ зростає на $\mathbb{R}$.

Доведено.

2) $f(x) = -\frac{2x^3}{3} - 2x = -\frac{2}{3}x^3 - 2x$

$D(f): x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = -\frac{2}{3} \cdot 3 \cdot x^2 - 2 = -2x^2 - 2 = -2(x^2 + 1)$

Бачимо, що при будь-якому значенні x : $-2(x^2 + 1) < 0$, отже $f(x)$ спадає на $\mathbb{R}$.

Доведено.

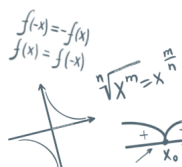
IV. Підсумок уроку

- Сформулюйте ознаку зростання функції
- Сформулюйте ознаку спадання функції
- Сформулюйте ознаку сталості функції
- Які точки ми називаємо критичними точками?

V. Домашнє завдання

Опрацювати §21, опрацювати конспект
Виконати № 21.6; 21.10; 21.12; 21.16.

О.С. Істер



МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС

Опрацювати п.22 (с. 120), опрацювати конспект
Виконати № 22.2, 22.4, 22.10.



А.Г. Мерзляк