

Правила диференціювання.
Фізичний і геометричний зміст похідної.

І Варіант

(6 б) Знайдіть значення похідної функції:

1) $f(x) = 2x^9$

Розв'язання:

$$f'(x) = 18x^8$$

Відповідь: $18x^8$

2) $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2\sqrt{x} + 1$

Розв'язання:

$$f'(x) = 5x^4 - 12x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Відповідь: $5x^4 - 12x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

3) $f(x) = \sqrt{x}(2 \cos x + 1)$

Розв'язання:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (2 \cos x + 1) + 2 \cdot (-\sin x) \cdot \sqrt{x} = \frac{2 \cos x + 1}{2\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} \sin x \\ &= \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} \sin x \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} \sin x$

4) (2 б) Розв'яжіть рівняння $f'(x) = 0$, якщо $f(x) = x^3 - 3x - 3$

Розв'язання:

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$3(x^2 - 1) = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

Відповідь: $1, -1$

5) (2 б) Знайдіть швидкість точки в момент часу t , що рухається за законом $s(t)$.

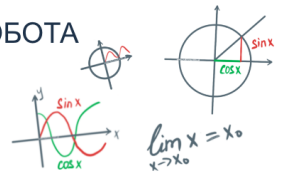
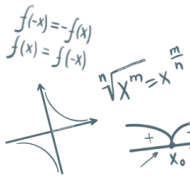
$$s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t + 4, \quad (s \text{ вимірюється в метрах, } t - \text{ в секундах})$$

$$t = 4.$$

Розв'язання:

$$v(t) = s'(t) = t^2 - 2$$

$$v(4) = 4^2 - 2 = 14 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$



Правила диференціювання.
Фізичний і геометричний зміст похідної.

Відповідь: $14 \frac{\text{м}}{\text{с}}$

- 6) (2 б) Знайдіть кут між дотичною до графіка функції $f(x) = \frac{7x - 8}{x}$ і додатним напрямком осі абсцис, якщо ця дотична побудована до графіка в точці $x_0 = -\sqrt{8}$

Розв'язання:

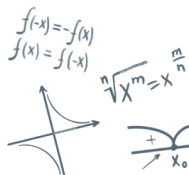
$$f(x) = \frac{7x - 8}{x}$$

$$f'(x) = \frac{7x - (7x - 8) \cdot 1}{x^2} = \frac{7x - 7x + 8}{x^2} = \frac{8}{x^2}$$

$$f'(-\sqrt{8}) = \frac{8}{8} = 1$$

$$\text{tg } 45^\circ = 1$$

Відповідь: 45°



Правила диференціювання.
Фізичний і геометричний зміст похідної.

II Варіант

(6 б) Знайдіть значення похідної функції:

1) $f(x) = 3x^6$

Розв'язання:

$$f'(x) = 18x^5$$

Відповідь: $18x^5$

2) $f(x) = x^4 - 4\sqrt{x} + 7$

Розв'язання:

$$f'(x) = 4x^3 - \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Відповідь: $4x^3 - \frac{2}{\sqrt{x}}$

3) $f(x) = (x^2 - 4x)(1 - 2\sqrt{x})$

Розв'язання:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x - 4)(1 - 2\sqrt{x}) + \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}(x^2 - 4x)\right) \\ &= 2x - 4x\sqrt{x} - 4 + 8\sqrt{x} - \frac{x^2}{\sqrt{x}} + \frac{4x}{\sqrt{x}} \\ &= 2x - 4x\sqrt{x} - 4 + 8\sqrt{x} - \sqrt{x^3} + 4\sqrt{x} \\ &= 2x - 4 + 12\sqrt{x} - 5\sqrt{x^3} \end{aligned}$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{x}} = \frac{x^2 \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = \frac{x^2 \cdot \sqrt{x}}{x} = x\sqrt{x} = \sqrt{x^2 \cdot x} = \sqrt{x^3}$$

Аналогічно $\frac{4x}{\sqrt{x}} = 4\sqrt{x}$

Відповідь: $2x - 4 + 12\sqrt{x} - 5\sqrt{x^3}$

4) (2 б) Розв'яжіть рівняння $f'(x) = 0$, якщо $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 5$

Розв'язання:

$$f'(x) = -3x^2 + 6x$$

$$-3x^2 + 6x = 0$$

$$-3x(x - 2) = 0$$

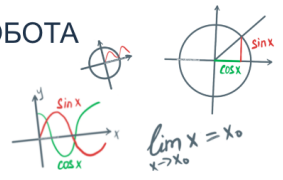
$$-3x = 0 \quad \text{або} \quad x - 2 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{або} \quad x = 2$$

Відповідь: 0, 2

5) (2 б) Знайдіть швидкість точки в момент часу t , що рухається за законом $s(t)$.

$$s(t) = 4t^2 + t - 3, \quad (s \text{ вимірюється в метрах, } t - \text{ в секундах})$$



Правила диференціювання.
Фізичний і геометричний зміст похідної.

$$t = 2.$$

Розв'язання:

$$v(t) = s'(t) = 8t + 1$$

$$v(2) = 8 \cdot 2 + 1 = 17 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Відповідь: $17 \frac{\text{м}}{\text{с}}$

- 6) (2 б) Знайдіть кут між дотичною до графіка функції $f(x) = \frac{2x - \sqrt{3}}{x}$ і додатним напрямком осі абсцис, якщо ця дотична побудована до графіка в точці $x_0 = -1$

Розв'язання:

$$f(x) = \frac{2x - \sqrt{3}}{x}$$

$$f'(x) = \frac{2x - (2x - \sqrt{3}) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x - 2x + \sqrt{3}}{x^2} = \frac{\sqrt{3}}{x^2}$$

$$f'(-1) = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}$$

Відповідь: 60°