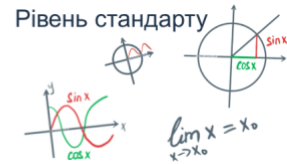


МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



Тема: Фізичний і геометричний зміст похідної.

Мета:

- *Навчальна:* розглянути та засвоїти фізичний і геометричний зміст похідної.
- *Розвиваюча:* навчити використовувати фізичний і геометричний зміст похідної для розв'язування математичних завдань.
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук;

Тип уроку: засвоєння нових знань;

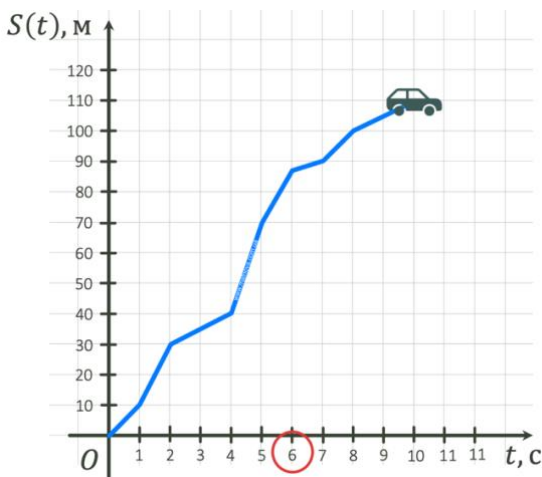
Обладнання: конспект, презентація, мультимедійне обладнання;

Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

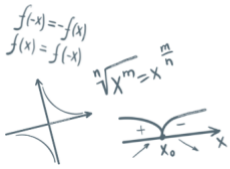
II. Вивчення нового матеріалу



// Фізичний зміст похідної

- Нехай авто рухається за певним законом $S(t)$
- Як знайти швидкість авто на 6-й секунді руху?
(можна знайти його середню швидкість на проміжку, що включає в себе 6-ту секунду руху)
- Середню швидкість на певному проміжку можна обчислити за формулою:

$$v_{\text{сеп}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$



МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС

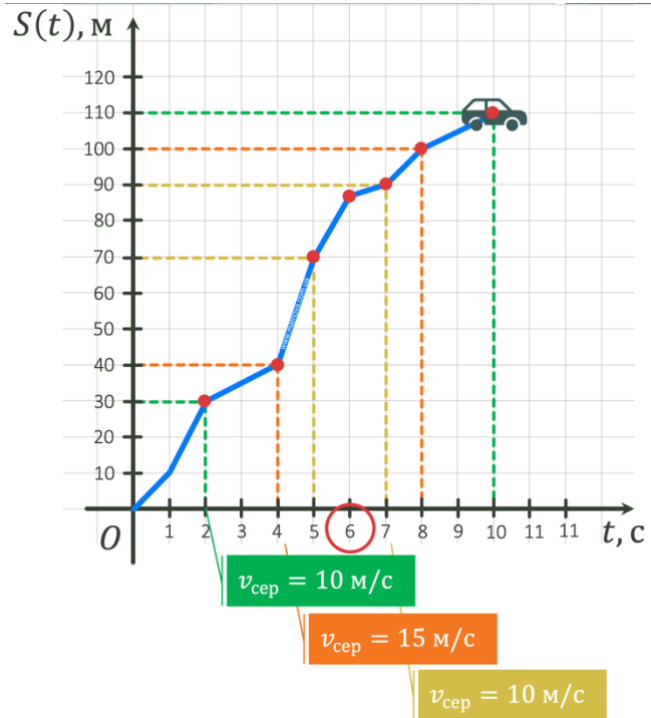


- Знайдемо середню швидкість авто на різних проміжках, а саме на проміжках часу 2-10 секунди, 4-8 секунди, 5-7 секунди:

$$v_{\text{сер}} = \frac{110 - 30}{10 - 2} = \frac{80}{8} = 10 \text{ м/с}$$

$$v_{\text{сер}} = \frac{100 - 40}{8 - 4} = \frac{60}{4} = \frac{15 \text{ м}}{\text{с}}$$

$$v_{\text{сер}} = \frac{90 - 70}{7 - 5} = \frac{20}{2} = 10 \text{ м/с}$$



- Бачимо, що чим ближче ми беремо значення з околу точки «6» на осі «t», то тим точнішим є значення миттєвої швидкості саме в цій точці. Отже, можемо зробити висновок:

$$v_{\text{мит}}(6) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(6)$$

Фізичний зміст похідної:

Якщо відомий закон руху $y = S(t)$, то **швидкість** $v_{\text{мит}}(t_0)$ дорівнює похідній цієї функції $v_{\text{мит}}(t_0) = S'(t_0)$.

$$v_{\text{мит}}(t_0) = S'(t_0)$$

→

$$a(t_0) = v'(t_0)$$

*Для знаходження прискорення достатньо взяти похідну від швидкості

Завдання 1 Електросамокат рухається за законом $S(t) = 3t^2 + 2t + 7$. Знайдіть швидкість і прискорення цього самокату на 4-й секунді його руху.

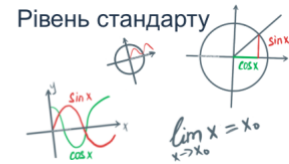
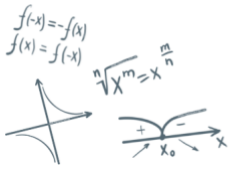
Розв'язання:

$$v(t) = S'(t) = 3 \cdot 2t + 2 = 6t + 2 \text{ м/с}$$

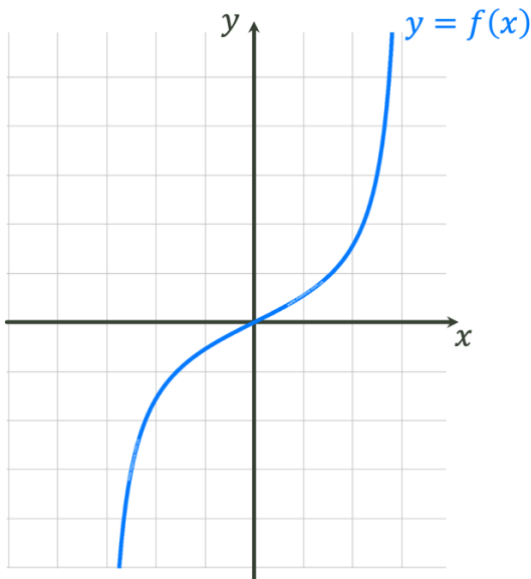
$$v(4) = S'(4) = 6 \cdot 4 + 2 = 26 \text{ м/с}$$

$$a(t) = v'(t) = (6t + 2)' = 6 \text{ м/с}^2 \text{ (тобто прискорення є сталим на всьому проміжку шляху)}$$

Відповідь: $v_{\text{мит}}(4) = 26 \text{ м/с}$
 $a(t) = 6 \text{ м/с}^2$



// Дотична до графіка функції

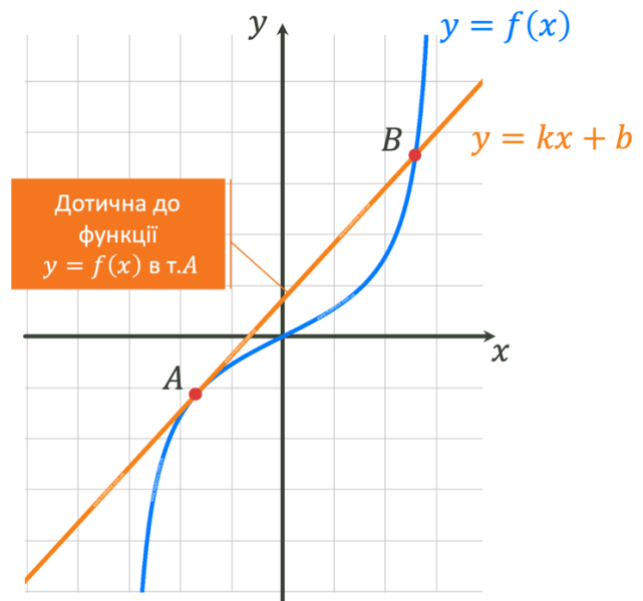


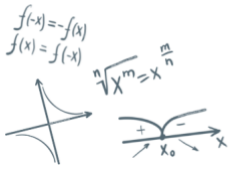
- Як ви розумієте поняття «дотична до графіка функції»
(Зазвичай учні асоціюють поняття дотичної до графіка з поняттям дотичної до кола)
- Чи завжди дотична має з графіком тільки одну спільну точку?

- На рисунку, пряма $y = kx + b$ – дотична до графіка $y = f(x)$

Як бачимо, дотична може мати з графіком функції більше однієї спільної точки. Зауважимо, що загальним виглядом будь-якої не вертикальної дотичної завжди буде пряма виду $y = kx + b$

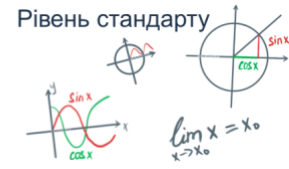
Отже, уведемо поняття дотичної в точці до графіка функції.





МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС

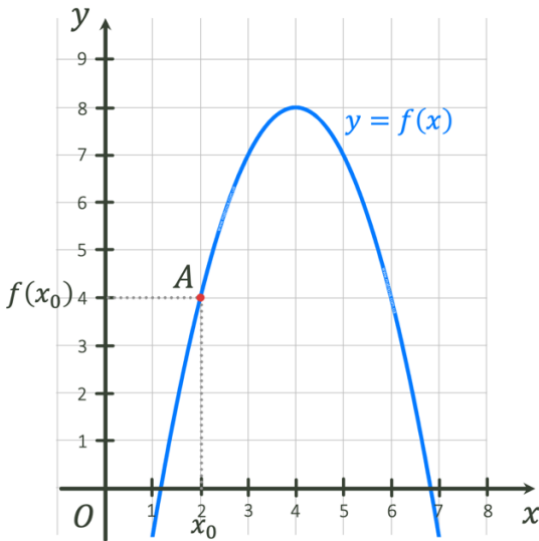


// Геометричний зміст похідної

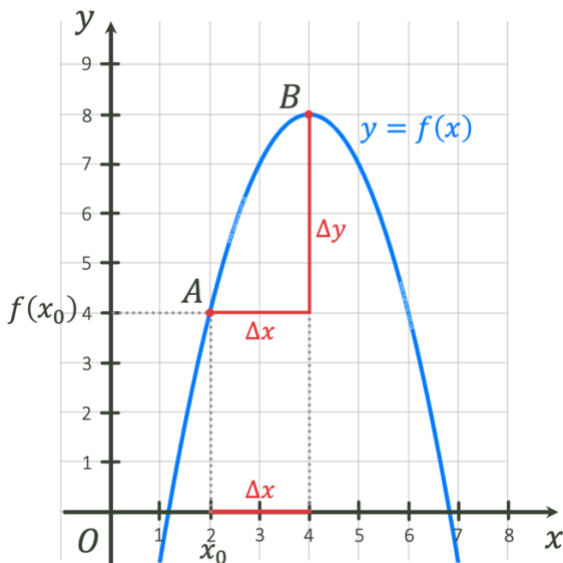
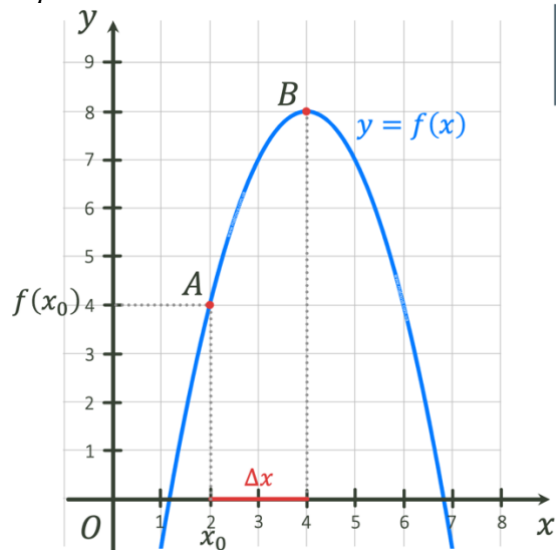
- Пригадаємо, що **похідна функції f у точці x_0** – це число, яке дорівнює границі відношення приросту функції Δy у точці x_0 до відповідного приросту аргументу Δx за умови, що приріст аргументу прямує до нуля.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

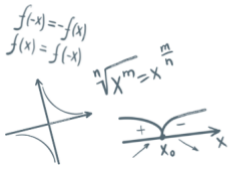
Розглянемо функцію $y = f(x)$, яка є неперервною в околі т. x_0 . Така функція в т. x_0 має значення $f(x_0)$. Позначимо відповідну точку на кривій літерою A .
 *Можна ще попросити учнів, щоб назвали координати т. A



- Надамо нашій функції в точці x_0 певний приріст аргументу Δx

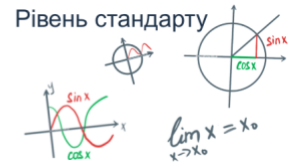


- Функція при цьому отримає приріст Δy , а на графіку функції отримаємо т. B

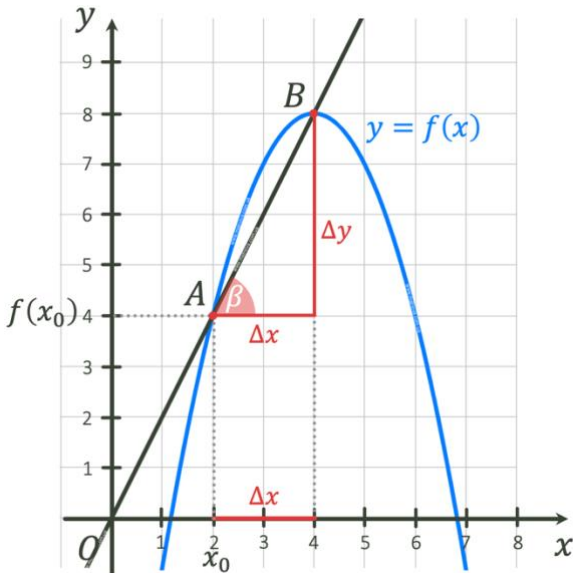
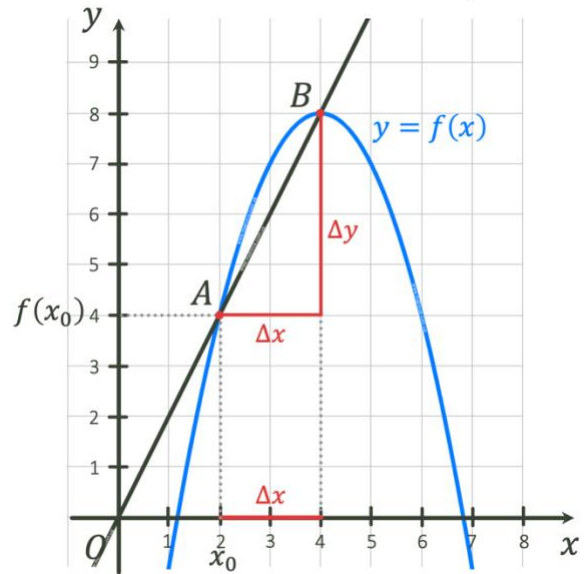


МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



- Побудуємо через точки A і B січну AB



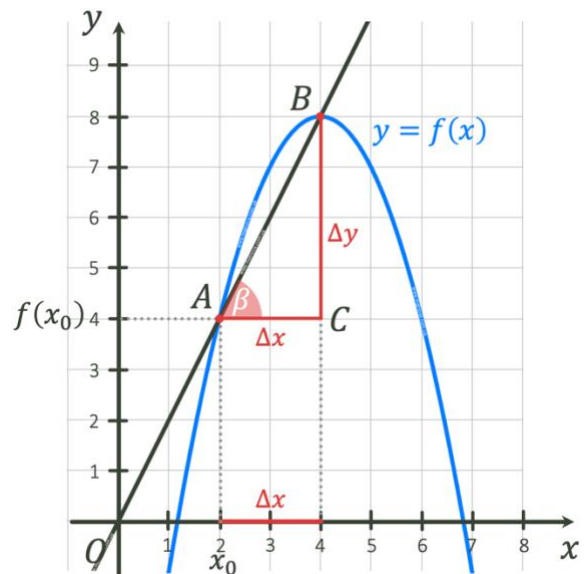
- Дана пряма утворить з додатним напрямком осі абсцис кут β

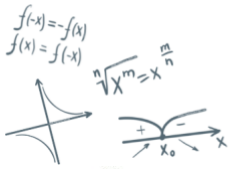
- Розглянемо $\triangle ABC$:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Можемо помітити, що це відношення записаної нами на початку границі, коли $\Delta x \rightarrow 0$.

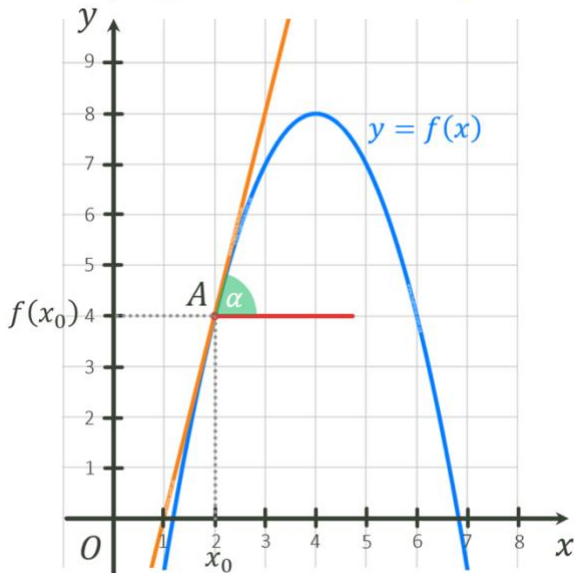
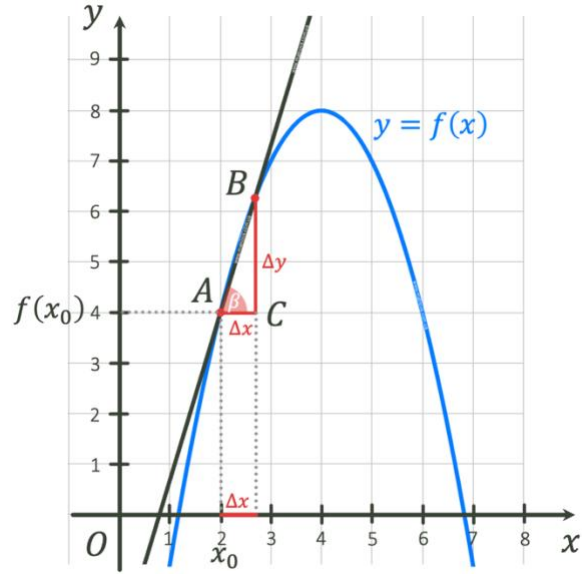
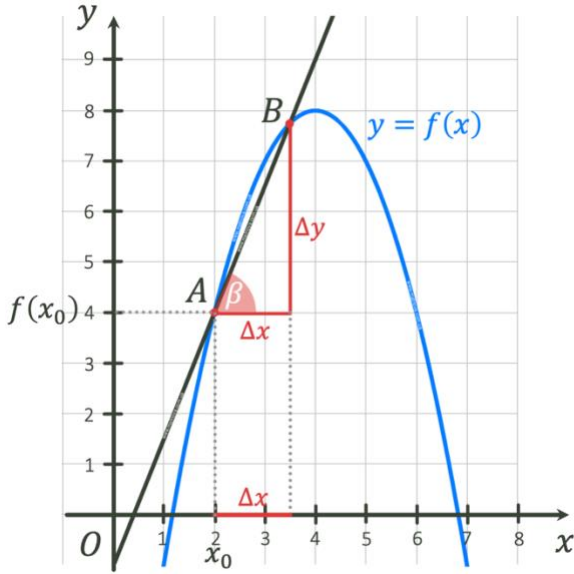
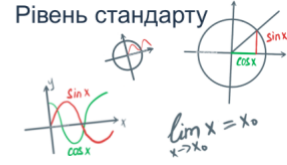
Отже, давайте будемо зменшувати Δx . Спостерігаємо, що т. B наближається до т. A , кут β змінюється і коли т. B суміщається з т. A , то кут β займає своє граничне значення, яке дорівнює α





МАТЕМАТИКА НОВА

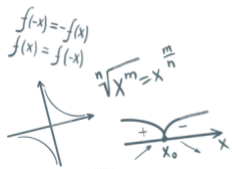
АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



Дотична в точці $(x_0; y_0)$ до графіка функції $y = f(x)$ – це граничне положення січної, що проходить через цю точку, коли $\Delta x \rightarrow 0$.

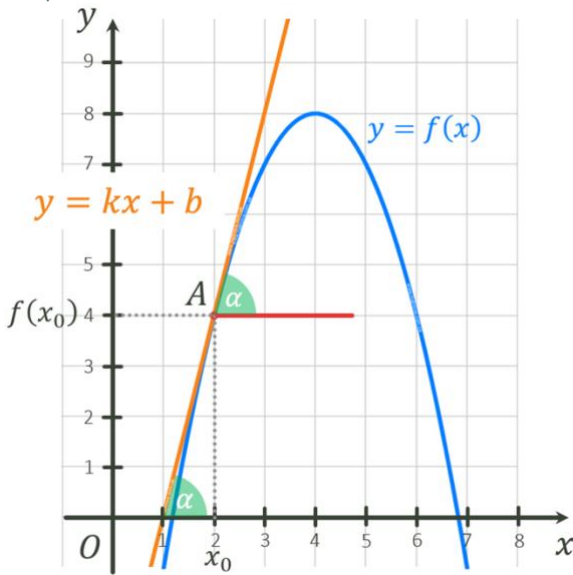
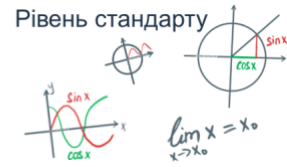
Оскільки $\text{tg } \alpha$ – це граничне положення $\text{tg } \beta$, коли $\Delta x \rightarrow 0$, то:

$$\text{tg } \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \text{tg } \beta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$



МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



Оскільки рівняння прямої $y = kx + b$, то можемо зробити висновок про геометричний зміст похідної:

$$k(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$$

Тобто кутковий коефіцієнт дотичної до графіка функції $f(x)$, проведеної в точці з абсцисою x_0 , дорівнює похідній функції у цій точці.

$$k(x_0) = f'(x_0)$$

Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 має вигляд:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

*З доведенням даного рівняння можна ознайомитись у підручнику.

III. Розв'язування завдань

*Перед виконанням даних завдань, можна або на інтуїтивному рівні пояснити найпростіші правила диференціювання функцій $(Cu)' = Cu'$ і $(u \pm v)' = u' \pm v'$, або виконувати завдання із підручника, або спочатку провести урок №42

№1

// ЗНО 2016

Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $S(t) = 4t^2 + 9t + 8$ (шлях S вимірюється в метрах, час t – у секундах). Визначте швидкість (у м/с) цієї точки в момент часу $t = 4$.

Розв'язання:

$$v(t) = s'(t) = (4t^2 + 9t + 8)' = 4 \cdot 2t + 9 = 8t + 9$$

$$v(4) = 8 \cdot 4 + 9 = 41 \text{ м/с}$$

Відповідь: 41 м/с

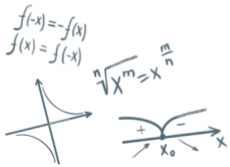
№2

// ЗНО 2011

Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $S(t) = 2t^2 + 3t$, де S вимірюється в метрах, час t – у секундах. Знайдіть значення t (у секундах), при якому миттєва швидкість матеріальної точки дорівнює 76 м/с

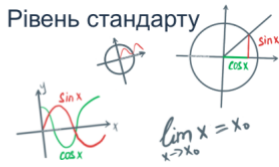
Розв'язання:

$$v(t) = s'(t) = (2t^2 + 3t)' = 4t + 3$$



МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



$$4t + 3 = 76$$

$$4t = 73$$

$$t = 18,25$$

Відповідь: 18,25 с

№3

// ЗНО 2008

Тіло рухається прямолінійно за законом $S(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t$ (час t вимірюється у секундах, шлях s – у метрах). Визначте прискорення його руху у момент $t = 10$ с.

Розв'язання:

$$a(t_0) = v'(t_0)$$

$$v_{\text{мит}}(t_0) = s'(t_0)$$

$$v(t) = \left(\frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t \right)' = 2t^2 - 4t + 4$$

$$a(t) = (2t^2 - 4t + 4)' = 4t - 4$$

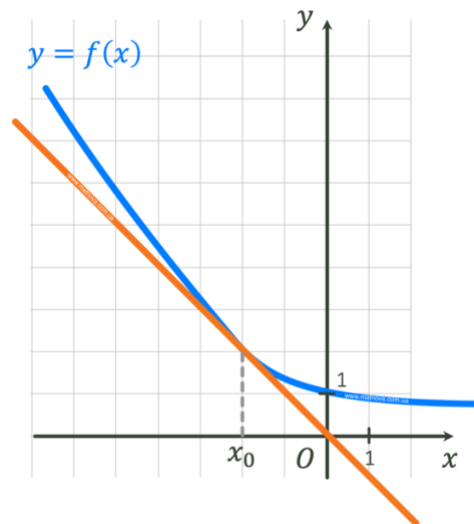
$$a(4) = 4 \cdot 10 - 4 = 36 \text{ м/с}^2$$

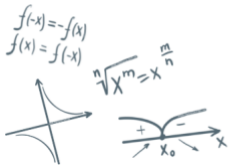
Відповідь: 36 м/с²

№4

// ЗНО 2006

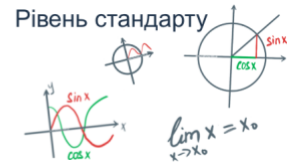
На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$ і дотичну до нього у точці з абсцисою x_0 . Знайдіть значення $f'(x_0)$.



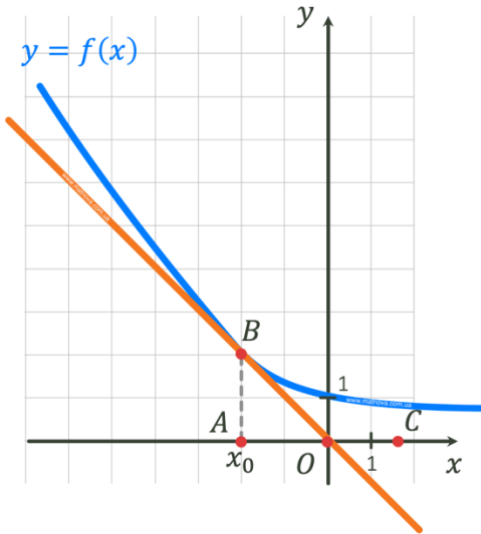


МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



Розв'язання:



Оскільки похідна функції $f(x)$ в точці x_0 дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної, проведеної до графіка функції $f(x)$ в точці з абсцисою x_0 , до додатного напрямку осі Ox , то:

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \angle BOC$$

$$\operatorname{tg} (180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg} \angle BOC = \operatorname{tg}(180^\circ - \angle AOB) = -\operatorname{tg} \angle AOB$$

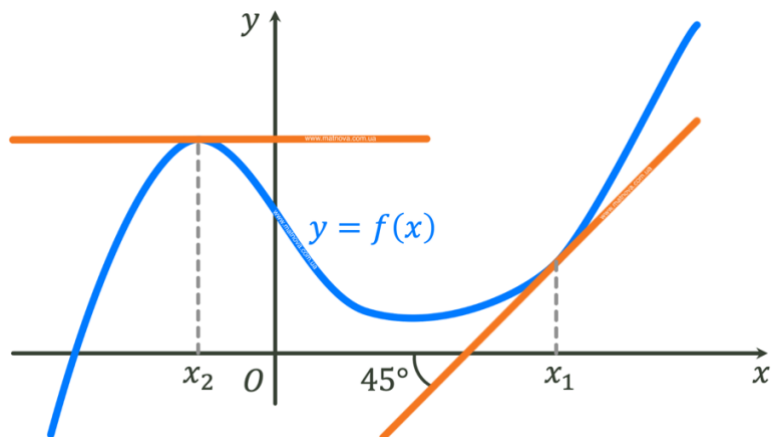
З $\triangle BAO$:

$$-\operatorname{tg} \angle AOB = -\frac{BA}{AO} = -\frac{2}{2} = -1$$

Відповідь: -1

// ЗНО 2007

На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$ та дотичні до нього в точках x_1 та x_2 . Користуючись геометричним змістом похідної, знайдіть $f'(x_1) + f'(x_2)$



№5

Розв'язання:

Використаємо геометричний зміст похідної:

$$f'(x_1) + f'(x_2) = \operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} 0^\circ = 1 + 0 = 1$$

Відповідь: 1

№6

// ЗНО 2014

Укажіть рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$, якщо $f(x_0) = 5$, $f'(x_0) = 2$

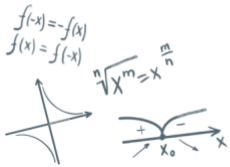
А $y = 1 + 2(x - 5)$

Г $y = 2 + 5(x + 1)$

Б $y = 5 + 2(x + 1)$

Д $y = 5 + 2(x - 1)$

В $y = 2 + 5(x - 1)$



МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



Розв'язання:

Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці x_0 має вигляд $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, нам залишається тільки підставити в це рівняння відповідні значення, що дані в умові.

Отримаємо:

$$y = 5 + 2(x - 1)$$

Відповідь: Д) $y = 5 + 2(x - 1)$

№7

// ЗНО 2017

Задано функцію $f(x) = x^2 + 3x - 10$. Визначте кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою $x_0 = -1$.

Розв'язання:

Використаємо геометричний зміст похідної:

$$f'(x) = (x^2 + 3x - 10)' = 2x + 3$$

$$f'(-1) = 2 \cdot (-1) + 3 = 1$$

Відповідь: $k = 1$

IV. Підсумок уроку

- Поясніть фізичний зміст похідної
- Поясніть геометричний зміст похідної
- Поясніть, що таке дотична в точці до графіка функції?
- Тіло рухається за законом $x(t) = t^2 - 7$. Знайдіть його швидкість на 2-й секунді руху, якщо t вимірюється у секундах, а x – у метрах.

V. Домашнє завдання

Опрацювати §19, опрацювати конспект
Виконати № 19.2; 19.4; 19.8; 19.10; 19.14; 19.16

О.С. Істер

А.Г. Мерзляк