

МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



Тема: Похідна функції. Похідні найпростіших функцій.

Мета:

- *Навчальна:* навчити знаходити приріст аргументу і приріст функції; увести поняття похідної функції в точці; диференційовної функції в точці; навчити знаходити похідну функції за означенням та за формулами.
- *Розвиваюча:* розвивати вміння знаходити приріст функції і приріст аргументу; знаходити похідну функції за означенням та за формулою.
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук;

Тип уроку: засвоєння нових знань;

Обладнання: конспект, презентація, мультимедійне обладнання;

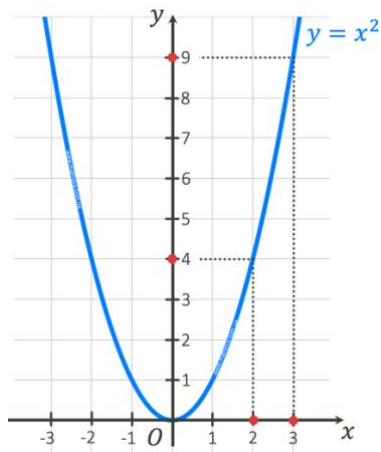
Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

II. Вивчення нового матеріалу

// Що таке приріст функції і приріст аргументу?



- Розглянемо вже відомий Вам графік функції $y = x^2$

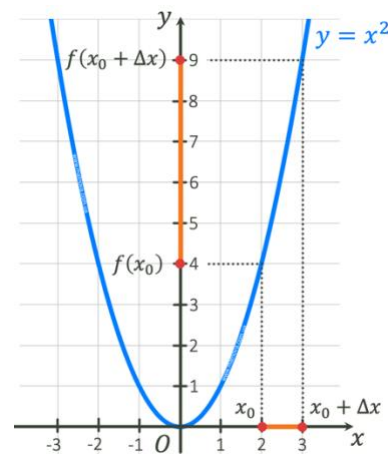
Значення функції в точці $x = 2$ дорівнює:

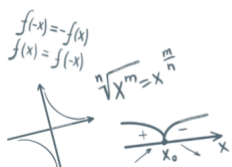
$$f(2) = 2^2 = 4$$

Збільшимо значення аргументу на 1, отримаємо:

$$f(2 + 1) = 3^2 = 9$$

- Отже, якщо значення аргументу $x_0 = 2$ збільшити на 1, то значення функції збільшиться на $f(2 + 1) - f(2)$





МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



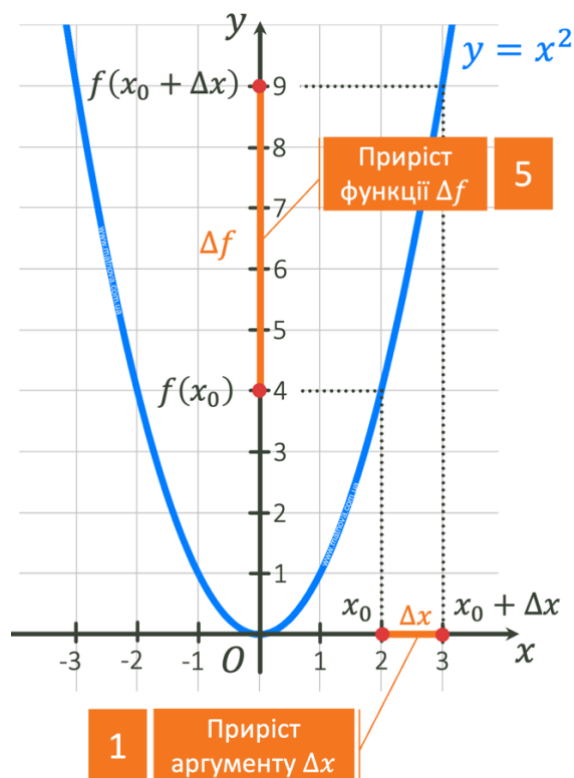
Αα alpha	Ββ beta	Γγ gamma	Δδ delta
Εε epsilon	Ζζ zeta	Ηη eta	Θθ theta
Ιι iota	Κκ kappa	Λλ lambda	Μμ mu
Νν nu	Ξξ xi	Οο omicron	Ππ pi
Ρρ rho	Σσ sigma	Ττ tau	Υυ upsilon
Φφ phi	Χχ chi	Ψψ psi	Ωω omega

Приріст величини будемо позначати великою літерою грецького алфавіту **Δ (дельта)**

➤ На рисунку легко помітити, що:

Приріст аргументу $\Delta x = 1$;

Приріст функції $\Delta f = 5$.



Різниця $x - x_0$ називається приростом аргументу у точці x_0 і позначається Δx («дельта ікс»).

Завдання 1 Знайдіть приріст аргументу Δx , якщо:

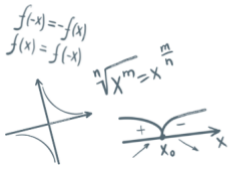
Розв'язання:

1) $x_0 = 7; x = 10$

$\Delta x = x - x_0 = 10 - 7 = 3$

2) $x_0 = 5; x = 1$

$\Delta x = x - x_0 = 1 - 5 = -4$



МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



Різниця $f(x) - f(x_0)$ називається приростом функції у у точці x_0 і позначається Δf («дельта еф»).

Завдання 1 Знайдіть приріст функції $f(x)$, у точці x_0 для даного приросту аргументу:

1) $f(x) = 4x - 1, x_0 = 1, \Delta x = 2$

2) $f(x) = \sin x, x_0 = 0, \Delta x = \frac{\pi}{4}$

Відповідь:

$\Delta f = 8$

$\Delta f = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Розв'язання:

1) $f(x) = 4x - 1, x_0 = 1, \Delta x = 2$

$x = x_0 + \Delta x = 1 + 2 = 3$

$f(3) = 4 \cdot 3 - 1 = 11$

$f(1) = 4 \cdot 1 - 1 = 3$

$\Delta f = f(x) - f(x_0) = 11 - 3 = 8$

2) $f(x) = \sin x, x_0 = 0, \Delta x = \frac{\pi}{4}$

$x = x_0 + \Delta x = 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(0) = \sin 0 = 0$

$\Delta f = f(x) - f(x_0) = \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

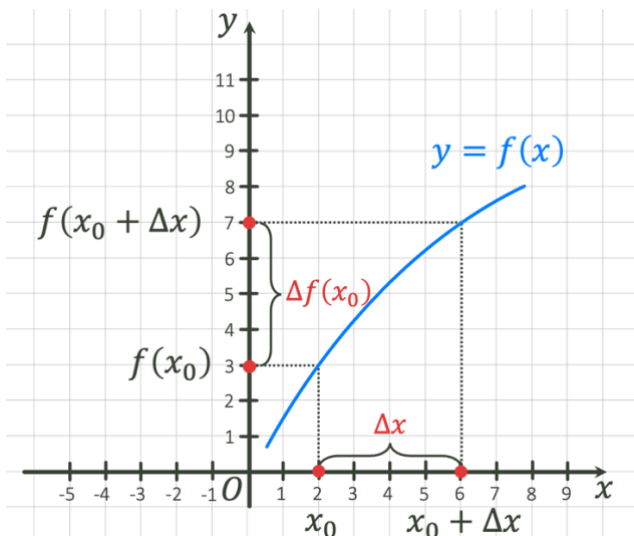
// Похідна функції

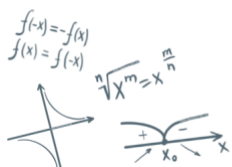
Похідною функції f у точці x_0 називають число, яке дорівнює границі відношення приросту функції f у точці x_0 до відповідного приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Означення похідної можна записати інакше:

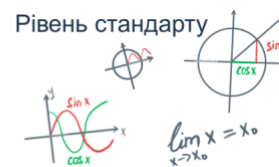
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$





МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



Позначення похідної:

$$f'(x_0)$$

Читаємо « f' у точці x_0 »

Якщо функція має похідну в точці, то вона є **диференційовною** в цій точці.

Диференціювання функції – дія знаходження похідної функції.

// Формули для знаходження похідних найпростіших відомих функцій

$$C' = 0$$

C – константа

$$x' = 1$$

$$(x^2)' = 2x$$

$$(x^3)' = 3x^2$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

*Опрацюємо на наступних уроках

$$(x^n)' = nx^{n-1}, n \in \mathbb{Z}$$

*Похідна степеневі функції

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

*Похідні тригонометричних функцій



Звідки беруться всі ці формули?

Всі формули отримані шляхом добування похідної з функції за означенням похідної.

// Як знаходити похідну функції?

Знайдемо похідну функції $f(x) = x^2$ в точці $x_0 = 8$

За означенням похідної

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

За формулою

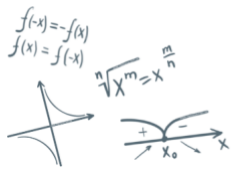
$$(x^2)' = 2x$$

- 1 Знайдемо приріст функції, що відповідає приросту аргументу:

$$f'(8) = 2 \cdot 8 = 16$$

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0) &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (8 + \Delta x)^2 - 8^2 \\ &= 64 + 16\Delta x + \Delta x^2 - 64 \\ &= 16\Delta x + \Delta x^2 \end{aligned}$$

- 2 Знайдемо відношення $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ та спростимо його:



МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{16\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(16 + \Delta x)}{\Delta x} = 16 + \Delta x$$

3 Знайдемо границю функції:

$$f'(8) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (16 + \Delta x) = 16$$

III. Розв'язування завдань

№1

Використовуючи формули диференціювання функцій, знайдіть похідну функції $f(x)$ у точці x_0 :

1) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$; $\frac{1}{16}$;

2) $f(x) = x^2$, $x_0 = 2,5$; -1 ;

3) $f(x) = x^3$, $x_0 = 3$; -2 ;

4) $f(x) = C$, $x_0 = 8$; 27 ;

Розв'язання:

1) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$; $\frac{1}{16}$;

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

$$f'\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{16}}} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 \cdot \frac{2}{1} = 2$$

2) $f(x) = x^2$, $x_0 = 2,5$; -1 ;

$$(x^2)' = 2x$$

$$f'(2,5) = 2 \cdot 2,5 = 5$$

$$f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$$

3) $f(x) = x^3$, $x_0 = 3$; -2 ;

$$(x^3)' = 3x^2$$

$$f'(3) = 3 \cdot 3^2 = 3 \cdot 9 = 27$$

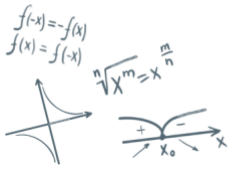
$$f'(-2) = 3 \cdot (-2) = -6$$

4) $f(x) = C$, $x_0 = 8$; 27 ;

$$C' = 0$$

$$f'(8) = 0$$

$$f'(27) = 0$$



МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



№2

Знайдіть відношення приросту функції до приросту аргументу, якщо:

- 1) $f(x) = 2x^2; x_0 = 1; \Delta x = 0,5; 2; -2$
- 2) $f(x) = x^2; x_0 = 1; \Delta x = 0,5; 1; 0,4$

Розв'язання:

- 1) $f(x) = 2x^2; x_0 = 1; \Delta x = 0,5; 2; -2$

Знайдемо приріст функції $f(x)$ у точці x_0 для даного приросту аргументу Δx :

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \quad // \text{ Загальна формула}$$

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0) &= 2(x_0 + \Delta x)^2 - 2x_0^2 = 2(x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2) - 2x_0^2 \\ &= 2x_0^2 + 4x_0\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 2x_0^2 = 4x_0\Delta x + 2(\Delta x)^2 \\ &= 2\Delta x(2x_0 + \Delta x) \end{aligned}$$

Знайдемо приріст функції до приросту аргументу:

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{2\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2(2x_0 + \Delta x)$$

$$x_0 = 1; \Delta x = 0,5$$

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = 2(2 \cdot 1 + 0,5) = 5$$

$$x_0 = 1; \Delta x = 2$$

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = 2(2 \cdot 1 + 2) = 8$$

$$x_0 = 1; \Delta x = -2$$

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = 2(2 \cdot 1 + (-2)) = 0$$

- 2) $f(x) = x^2; x_0 = 1; \Delta x = 0,5; 1; 0,4$

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0) &= (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 \\ &= 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 = \Delta x(2x_0 + \Delta x) \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

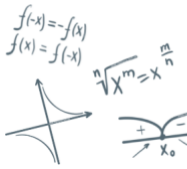
$$x_0 = 1; \Delta x = 0,5$$

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = 2 \cdot 1 + 0,5 = 2,5$$

$$x_0 = 1; \Delta x = 1$$

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$x_0 = 1; \Delta x = 0,4$$



МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = 2 \cdot 1 + 0,4 = 2,4$$

№3

- 1) Користуючись означенням похідної, знайдіть формулу похідної даної функції та значення похідної функції в точках -1 ; 2 .

$$f(x) = x^2 - 3x$$

- 2) Користуючись означенням похідної, знайдіть формулу похідної функції:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Розв'язання:

- 1) $f(x) = x^2 - 3x, x_0 = -1, x_0 = 2$

Означення похідної:
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Отже, в дану функцію замість « x » підставимо спочатку значення « $x_0 + \Delta x$ », а потім значення « x_0 »:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - 3(x_0 + \Delta x) - (x_0^2 - 3x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - 3x_0 - 3\Delta x - x_0^2 + 3x_0}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - 3\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x - 3)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x - 3) = 2x_0 - 3 \end{aligned}$$

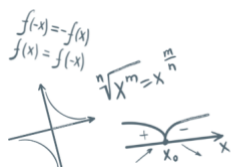
$$f'(x_0) = 2x_0 - 3$$

$$f'(-1) = 2 \cdot (-1) - 3 = -5$$

$$f'(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1$$

- 2) $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{x_0^2 + x_0\Delta x} \\ &= -\frac{1}{x_0^2} \\ f'(x_0) &= -\frac{1}{x_0^2} \end{aligned}$$



МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



IV. Підсумок уроку

- Поясніть, що таке приріст аргументу? Наведіть приклад.
- Поясніть, що таке приріст функції? Наведіть приклад.
- Яка функція називається диференційовною в точці? Як називається процес знаходження похідної функції?
- Поясніть, як знайти похідну функції за означенням?

V. Домашнє завдання

Опрацювати §18, опрацювати конспект
Виконати № 18.2, 18.6, 18.8, 18.10, 18.22

О.С. Істер

Опрацювати конспект, п.18 , п.19 (стор. 105)
Виконати № 18.2, 18.6, 19.3

А.Г. Мерзляк