

МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



Тема: Формули суми й різниці однойменних тригонометричних функцій. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму.

Мета:

- *Навчальна:* вивести і засвоїти формули суми і різниці тригонометричних функцій та формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму.
- *Розвиваюча:* розвивати вміння користуватись новими формулами.
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук;

Тип уроку: засвоєння нових знань;

Обладнання: конспект, презентація, мультимедійне обладнання;

Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

II. Актуалізація опорних знань

- Протягом уроку учні будуть використовувати вже відомі їм формули для доведення нових формул.

III. Вивчення нового матеріалу

// **Формули суми і різниці тригонометричних функцій**

- Пригадайте формули синуса суми і різниці аргументів та почленно додайте дані формули.

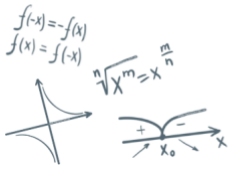
$$\begin{array}{r}
 + \quad \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \\
 \quad \sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \\
 \hline
 \sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \sin x \cos y
 \end{array}$$

Нехай:

$$x + y = \alpha, \quad x - y = \beta$$

Тоді:

$$\begin{array}{rcl}
 + \quad \begin{array}{l} x + y = \alpha \\ x - y = \beta \end{array} & - \quad \begin{array}{l} x + y = \alpha \\ x - y = \beta \end{array} & \\
 \hline
 2x = \alpha + \beta & & 2y = \alpha - \beta \\
 x = \frac{\alpha + \beta}{2} & & y = \frac{\alpha - \beta}{2}
 \end{array}$$



МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



Підставимо отримані вирази (x і y) у формулу, що ми отримали вище:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

➤ Аналогічно отримуємо формули формули суми і різниці косинусів:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

➤ Формули тангенсів можна отримати використовуючи означення тангенса і формулу синуса суми аргументів:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

Щоб отримати формулу різниці тангенсів, можна у формулу суми тангенсів β замінити на $-\beta$, а також врахувати, що тангенс – непарна функція.

Формули суми і різниці тангенсів:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

Приклад 1

Подати у вигляді добутку вираз:

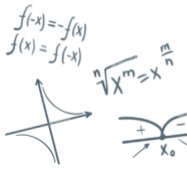
1) $\sin 3\alpha - \sin 5\alpha$

2) $\cos 315^\circ + \cos 225^\circ$

Розв'язання:

$$\begin{aligned} 1) \quad \sin 3\alpha - \sin 5\alpha &= 2 \sin \frac{3\alpha - 5\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha + 5\alpha}{2} = 2 \sin(-\alpha) \cos 4\alpha \\ &= -2 \sin \alpha \cos 4\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \cos 315^\circ + \cos 225^\circ &= 2 \cos \frac{315^\circ + 225^\circ}{2} \cos \frac{315^\circ - 225^\circ}{2} \\ &= 2 \cos 270^\circ \cos 45^\circ = 2 \cdot 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{aligned}$$



МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



// **Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму**

Додамо почленно формули косинуса різниці і суми аргументів:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

+

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2} = \frac{2 \cos \alpha \cos \beta}{2}$$

Отже, отримали формулу:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

Спробуємо тепер відняти почленно формули косинуса різниці і суми аргументів:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

-

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$\frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2} = \frac{2 \sin \alpha \sin \beta}{2}$$

Отже, отримали формулу:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

Додамо почленно формули синуса різниці і суми аргументів:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

+

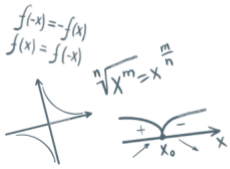
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\frac{\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)}{2} = \frac{2 \sin \alpha \cos \beta}{2}$$

Отримали ще одну формулу:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$



МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



Приклад 2

Знайдіть значення виразу $\cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}$, якщо відомо, що $\cos x = \frac{2}{3}$

Розв'язання:

$$\cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{3x}{2} - \frac{x}{2} \right) + \cos \left(\frac{3x}{2} + \frac{x}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} (\cos x + \cos 2x)$$

Знайдемо $\cos 2x$:

$$\cos^2 x = \frac{x + \cos 2x}{2}$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^2 - 1 = \frac{16}{9} - 1 = \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$$

$$\cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} (\cos x + \cos 2x) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{9} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6-1}{9} = \frac{5}{18}$$

Відповідь: $\frac{5}{18}$

IV. Розв'язування завдань

№1

1.1 Перетворіть суму на добуток:

1) $\cos 7^\circ + \cos(-53^\circ)$

2) $\sin(22^\circ + \alpha) - \sin \alpha$

Розв'язання:

$$\begin{aligned} 1) \quad \cos 7^\circ + \cos(-53^\circ) &= 2 \cos \frac{7^\circ - 53^\circ}{2} \cos \frac{7^\circ + 53^\circ}{2} = 2 \cos(-23^\circ) \cos 30^\circ \\ &= 2 \cdot \cos 23^\circ \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cos 23^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \sin(22^\circ + \alpha) - \sin \alpha &= 2 \sin \frac{22^\circ + \alpha - \alpha}{2} \cos \frac{22^\circ + \alpha + \alpha}{2} \\ &= 2 \sin 11^\circ \cos(11^\circ + \alpha) \end{aligned}$$

Відповідь: 1) $\sqrt{3} \cos 23^\circ$; 2) $2 \sin 11^\circ \cos(11^\circ + \alpha)$

1.2 Обчисліть, не використовуючи калькулятор:

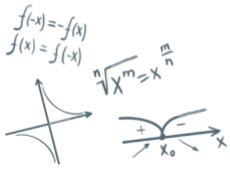
1) $\sin 20^\circ + \sin 40^\circ - \sin 80^\circ$

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \sin 20^\circ + \sin 40^\circ - \sin 80^\circ &= 2 \sin 30^\circ \cos(-10^\circ) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos 10^\circ - \sin 80^\circ \\ &= \sin 80^\circ - \sin 80^\circ = 0 \end{aligned}$$

Так як $\cos(-10^\circ) = \cos 10^\circ$ і $\cos 10^\circ = \cos(90^\circ - 80^\circ) = \sin 80^\circ$

Відповідь: 0



МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



№2

Перетворіть суму у добуток:

1) $\sin 35^\circ \sin(-25^\circ)$

2) $\cos 13\alpha \sin 7\alpha$

Розв'язання:

1)
$$\begin{aligned} \sin 35^\circ \sin(-15^\circ) &= -\sin 35^\circ \sin 15^\circ = -\frac{1}{2}(\cos 50^\circ + \cos 20^\circ) \\ &= -\frac{1}{2}\cos 50^\circ + \left(-\frac{1}{2}\cos 20^\circ\right) \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} \cos 13\alpha \sin 7\alpha &= \sin 7\alpha \cos 13\alpha = \frac{1}{2}(\sin(-6^\circ) + \sin 20^\circ) \\ &= \frac{1}{2}(\sin 20^\circ - \sin 6^\circ) = -\frac{1}{2}\sin 6^\circ + \frac{1}{2}\sin 20^\circ \end{aligned}$$

Відповідь: 1) $-\frac{1}{2}\cos 50^\circ + \left(-\frac{1}{2}\cos 20^\circ\right)$ 2) $-\frac{1}{2}\sin 6^\circ + \frac{1}{2}\sin 20^\circ$

№3

Спростіть вираз:

1) $\frac{\cos \alpha + \cos 3\alpha}{\sin \alpha - \sin 3\alpha}$

Розв'язання:

$$\frac{\cos \alpha + \cos 3\alpha}{\sin \alpha - \sin 3\alpha} = \frac{2 \cos \frac{\alpha + 3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha - 3\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha - 3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha + 3\alpha}{2}} = \frac{\cos 2\alpha \cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha) \cos 2\alpha} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha$$

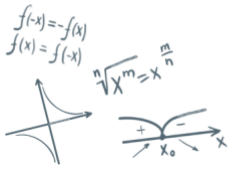
Відповідь: $-\operatorname{ctg} \alpha$

№4

Доведіть тотожність:

1) $4 \sin \alpha \sin(60^\circ - \alpha) \sin(60^\circ + \alpha) = \sin 3\alpha$

2) $\frac{\sin 2\alpha - \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos \alpha + \cos 4\alpha} = 2 \sin \alpha$



МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



Доведення:

$$1) \quad 4 \sin \alpha \sin(60^\circ - \alpha) \sin(60^\circ + \alpha) = \sin 3\alpha$$

$$\begin{aligned} & 4 \sin \alpha \cdot \frac{1}{2} (\cos(60^\circ - \alpha - (60^\circ + \alpha)) + \cos(60^\circ - \alpha + 60^\circ + \alpha)) \\ &= 2 \sin \alpha (\cos(-2\alpha) + \cos 120^\circ) = 2 \sin \alpha \left(\cos 2\alpha - \left(-\frac{1}{2}\right) \right) \\ &= 2 \sin \alpha \cos 2\alpha + \sin \alpha \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} (\sin(\alpha - 2\alpha) + \sin(\alpha + 2\alpha)) + \sin \alpha \\ &= \sin(-\alpha) + \sin 3\alpha + \sin \alpha = -\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin \alpha = \sin 3\alpha \\ \sin 3\alpha &= \sin 3\alpha \end{aligned}$$

Доведено.

$$\begin{aligned} 2) \quad & \frac{\sin 2\alpha - \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos \alpha + \cos 4\alpha} = 2 \sin \alpha \\ & \frac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 4\alpha} = 2 \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\frac{\sin 2\alpha + 2 \sin \alpha \cos 4\alpha}{\cos \alpha + \cos 4\alpha} = 2 \sin \alpha$$

// Використали формулу:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \sin \alpha \cos 4\alpha}{\cos \alpha + \cos 4\alpha} = 2 \sin \alpha$$

// Використали формулу:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\frac{2 \sin \alpha (\cos \alpha + \cos 4\alpha)}{\cos \alpha + \cos 4\alpha} = 2 \sin \alpha$$

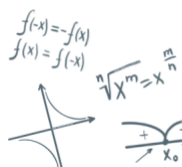
// Винесли за дужки $2 \sin \alpha$

$$2 \sin \alpha = 2 \sin \alpha$$

Доведено.

V. Підсумок уроку

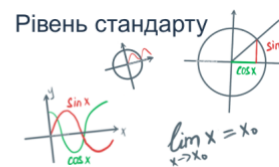
- Якими формулами ми з вами користувались на уроці?
- Як можна отримати формули суми і різниці тригонометричних функцій?
- Як можна отримати формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму?



МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС

- Що на уроці вам було найбільш простим?



VI. Домашнє завдання

Опрацювати §15

Виконати № 15.4 (3, 4); 15.8 (1); 15.12 (3,4); 15.16

О.С. Істер