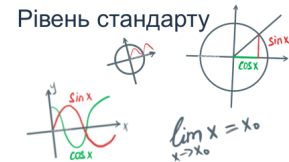


МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



Тема: Формули подвійного і половинного кута. Формули пониження степеня.

Мета:

- *Навчальна:* вивести і засвоїти формули подвійного та половинного кута, формули пониження степеня.
- *Розвиваюча:* розвивати вміння користуватись формулами подвійного і половинного кута, формулами пониження степеня.
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук;

Тип уроку: засвоєння нових знань;

Обладнання: конспект, презентація, мультимедійне обладнання;

Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

II. Актуалізація опорних знань

- Протягом уроку учні будуть використовувати вже відомі їм формули для доведення нових формул.

III. Вивчення нового матеріалу

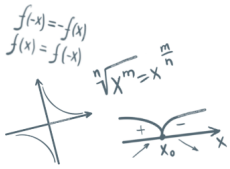
// **Формули подвійного кута**

- Пригадайте формулу синуса суми аргументів за запишіть її для випадку, коли $\alpha = \beta$:

$$\left. \begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha + \alpha) &= \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \right| \rightarrow \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

- Пригадайте формулу косинуса суми аргументів за запишіть її для випадку, коли $\alpha = \beta$:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \alpha) &= \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha \end{aligned} \right| \rightarrow \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$



МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



- Скориставшись основною тригонометричною тотожністю і вже відомою формулою косинуса подвійного кута, можна отримати ще дві формули для косинуса подвійного кута:

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha &= 1 - \sin^2 \alpha & \cos 2\alpha &= 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ \sin^2 \alpha &= 1 - \cos^2 \alpha & \cos 2\alpha &= 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{aligned}$$

- Знайдемо формулу тангенса подвійного кута:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha} \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \end{aligned}$$

Приклад 1

Перетворіть кожен вираз, використовуючи формули подвійного кута:

- | | |
|-----------------------------|--|
| 1) $\sin 6\alpha$ | 2) $\cos \alpha$ |
| 3) $\sin \frac{3\alpha}{4}$ | 4) $2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos \alpha$ |

Розв'язання:

- $\sin 6\alpha = 2 \sin 3\alpha \cos 3\alpha$
- $\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$
- $\sin \frac{3\alpha}{4} = 2 \sin \frac{3\alpha}{8} \cos \frac{3\alpha}{8}$
- $2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos \alpha = 1 - \cos \alpha + \cos \alpha = 1$

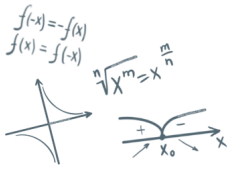
// Формули пониження степеня

- Виразимо $\sin^2 \alpha$ і $\cos^2 \alpha$ з вже відомих формул косинуса подвійного кута:

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= 1 - 2 \sin^2 \alpha & \cos 2\alpha &= 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ 2 \sin^2 \alpha &= 1 - \cos 2\alpha & 2 \cos^2 \alpha &= 1 + \cos 2\alpha \\ \sin^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} & \cos^2 \alpha &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \end{aligned}$$

- Знайдемо формулу пониження степеня для тангенса, для цього використаємо щойно отримані формули пониження степеня синуса і косинуса:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \cdot \frac{2}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \\ \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \end{aligned}$$



МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



// Формули половинного аргументу

➤ Підставимо у щойно знайдені нами формули пониження степеня кут $\frac{\alpha}{2}$ замість кута α :

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

IV. Розв'язування завдань

№1

Обчисліть:

1) $\frac{8 \sin 14^\circ \cos 14^\circ}{\sin 28^\circ}$

2) $\frac{\sin 88^\circ}{\sin 22^\circ \cos 22^\circ \cos 44^\circ}$

3) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$

Розв'язання:

1) $\frac{8 \sin 14^\circ \cos 14^\circ}{\sin 28^\circ} = \frac{4 \cdot 2 \sin 14^\circ \cos 14^\circ}{\sin 28^\circ} = \frac{4 \sin 28^\circ}{\sin 28^\circ} = 4$

2) $\frac{\sin 88^\circ}{\sin 22^\circ \cos 22^\circ \cos 44^\circ} = \frac{2 \sin 44^\circ \cos 44^\circ}{\sin 22^\circ \cos 22^\circ \cos 44^\circ} = \frac{2 \sin 44^\circ}{\sin 22^\circ \cos 22^\circ}$
 $= \frac{2 \cdot 2 \sin 22^\circ \cos 22^\circ}{\sin 22^\circ \cos 22^\circ} = 4$

3) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

№2

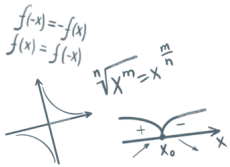
Спростіть вираз:

1) $\frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{1 + \sin 2\alpha}$

2) $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$

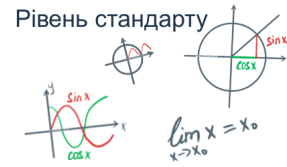
Розв'язання:

1) $\frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{1 + \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = 1$



МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



$$2) \quad \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

Відповідь: 1) 1; 2) $\operatorname{tg} \alpha$

№3

Доведіть тотожність:

- 1) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$
- 2) $\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$
- 3) $\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = \frac{1 + \sin 2x}{2}$

Доведення:

**В кожному завдання доведемо, що ліва частина дорівнює правій.*

$$1) \quad \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$$

$$(\cos^2 \alpha)^2 - (\sin^2 \alpha)^2 = \cos 2\alpha$$

// Використаємо формулу:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \cos 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha \cdot 1 = \cos 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos 2\alpha$$

Доведено.

$$2) \quad \cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$$

// Використаємо формулу:

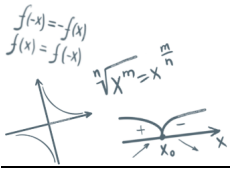
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

*Так як за цією формулою з'являється подвоєний добуток, то його нам потрібно буде відняти.

$$(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2 - 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$$

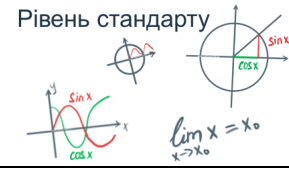
$$1 - 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$$

$$1 - 2 \cos \alpha \cos \alpha \sin \alpha \sin \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$$



МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



$$1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$$

$$1 - \sin 2\alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$$

$$1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$$

Доведено.

3)
$$\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = \frac{1 + \sin 2x}{2}$$

Використаємо формулу пониження степеня:

$$\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = \frac{1 - \cos \left(2 \left(\frac{\pi}{4} + x \right) \right)}{2} = \frac{1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} + 2x \right)}{2}$$

Використаємо формулу зведення:

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} + 2x \right) = -\sin 2x$$

Отже:

$$1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} + 2x \right) = 1 - (-\sin 2x) = 1 + \sin 2x$$

$$\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = \frac{1 + \sin 2x}{2}$$

$$\frac{1 + \sin 2x}{2} = \frac{1 + \sin 2x}{2}$$

Доведено.

№4

Віщомо, що $\cos 2\alpha = -\frac{1}{3}$ і $\pi < 2\alpha < \frac{3\pi}{2}$. Знайдіть:

1) $\sin \frac{\alpha}{2}$

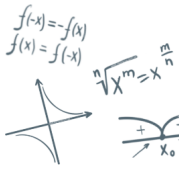
2) $\cos \frac{\alpha}{2}$

3) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

Розв'язання:

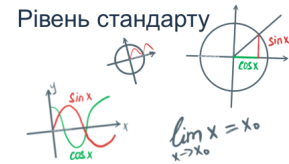
Для кожної з формул половинного аргументу, нам потрібно знати $\cos \alpha$, тому знайдемо $\cos \alpha$:

$$\pi < 2\alpha < \frac{3\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}, \text{ тобто кут } \alpha \text{ належить II чверті, отже } \cos \alpha < 0$$



МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \frac{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)}{2} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{2} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

Так як в нас $\cos \alpha < 0$, то:

$$\cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Знайдемо, в якій координатній чверті знаходиться кут $\frac{\alpha}{2}$:

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{8}, \text{ тобто кут } \frac{\alpha}{2} \text{ належить I чверті, отже } \sin \frac{\alpha}{2} > 0, \\ \cos \frac{\alpha}{2} > 0 \text{ і } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} > 0$$

1)

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{1 - \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)}{2} = \frac{1 + \sqrt{\frac{1}{3}}}{2} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{3}}{6}}$$

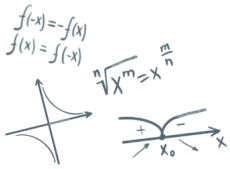
2)

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 + \cos \alpha}{2} = \frac{1 + \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)}{2} = \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{3}}}{2} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{3}}{6}}$$

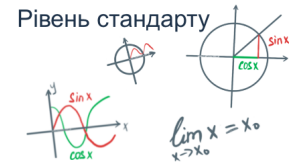
3)

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{3 + \sqrt{3}}{6}}{\frac{3 - \sqrt{3}}{6}}} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{3}}{6} \cdot \frac{6}{3 - \sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}}$$



МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



V. Підсумок уроку

- Якими формулами ми з вами користувались на уроці?
- Чи використовували ми сьогодні формули скороченого множення?
- Як саме можна отримати формули пониження степеня і половинного аргументу?
- Скільки формул для косинуса подвійного кута ми сьогодні довели? Синуса і тангенса?

VI. Домашнє завдання

Опрацювати §14, опрацювати конспект
Виконати № 14.4; 14.8 (2, 4, 5); 14.16; 14.20

О.С. Істер

Повторити п.13
Виконати № 13.19; 13.30; 13.32

А.Г. Мерзляк