Тема: Тригонометричні формули додавання.

Мета:

- *Навчальна:* довести і засвоїти тригонометричні формули різниці і суми аргументів.
- *Розвиваюча:* навчити застосовувати тригонометричними формулами різниці і суми аргументів.
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук;

Тип уроку: засвоєння нових знань;

Обладнання: конспект, презентація, мультимедійне обладнання;

Хід уроку

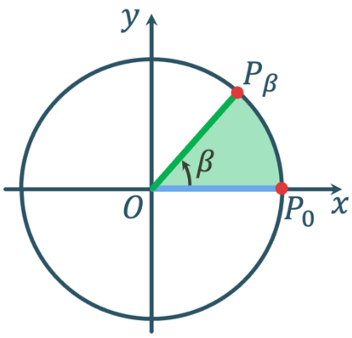
I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

II. Актуалізація опорних знань

III. Вивчення нового матеріалу

// Косинус різниці і суми аргументів

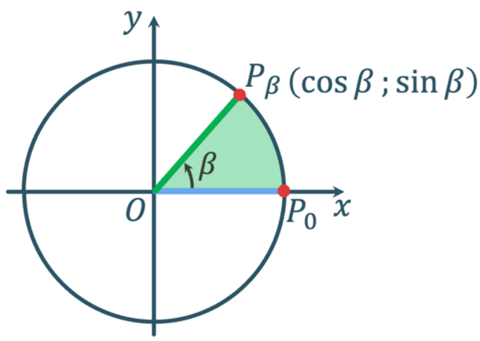


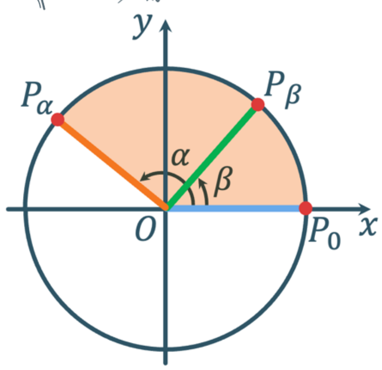
- При повороті на кут β початковий радіус одиничного кола OP_0 перейшов у радіус OP_β. Назвіть координати точки P_β

  Координати точки P_β: $(\cos\beta\,;\sin\beta)$

- Назвіть координати вектора $\overrightarrow{OP_\beta}$

  Координатами вектора $\overrightarrow{OP_\beta}$ будуть координати точки P_β: $(\cos\beta\,;\sin\beta)$





- Назвіть координати вектора $\overrightarrow{OP_\alpha}$

  Координати вектора $\overrightarrow{OP_\alpha}$*:* $(\cos\alpha\,;\sin\alpha)$

$\overrightarrow{OP_\beta}(\cos\beta\,;\sin\beta)$

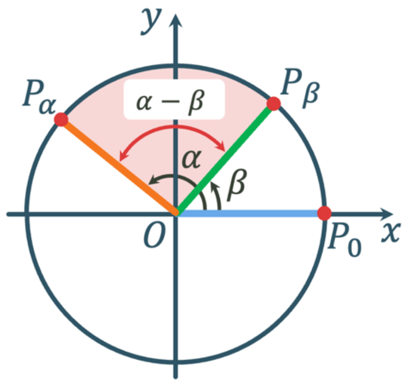
$\overrightarrow{OP_\alpha}(\cos\alpha\,;\sin\alpha)$

- Виразіть скалярний добуток векторів $\overrightarrow{OP_\alpha}$ і $\overrightarrow{OP_\beta}$ через їх координати.

$$\overrightarrow{OP_\alpha}\cdot\overrightarrow{OP_\beta}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

- Виразіть скалярний добуток векторів $\overrightarrow{OP_\alpha}$ і $\overrightarrow{OP_\beta}$ через теорему про скалярний добуток векторів.

$$\overrightarrow{OP_\alpha}\cdot\overrightarrow{OP_\beta}=\left|\overrightarrow{OP_\alpha}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OP_\beta}\right|\cdot\cos\angle P_\alpha O P_\beta$$



- Тепер можемо вивести формулу косинуса різниці:

$$\left.\begin{array}{c}\overrightarrow{OP_\alpha}\cdot\overrightarrow{OP_\beta}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\\ \overrightarrow{OP_\alpha}\cdot\overrightarrow{OP_\beta}=\left|\overrightarrow{OP_\alpha}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OP_\beta}\right|\cdot\cos\angle P_\alpha O P_\beta\\ \angle P_\alpha O P_\beta=\alpha-\beta\\ \left|\overrightarrow{OP_\alpha}\right|=1\\ \left|\overrightarrow{OP_\beta}\right|=1\end{array}\right|\rightarrow \boldsymbol{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$$

- З формули косинуса різниці можна отримати формулу косинуса суми, якщо у формулу косинуса різниці замість кута «β» підставити кут «$-\beta$».

$$\boldsymbol{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

Формули косинуса різниці і суми аргументів:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

Приклад 1:

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

// Синус різниці і суми аргументів

Формула синуса різниці аргументів:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$$

Доведення:

$$\boldsymbol{\sin(\alpha - \beta)} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right) =$$
$$= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \beta\right) =$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta =$$
$$= \boldsymbol{\sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta}$$

$// \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$

$// \cos(\alpha + \beta) =$
$= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$

Доведено.

Формула синуса суми аргументів:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

Доведення:

$$\boldsymbol{\sin(\alpha + \beta)} = \sin(\alpha - (-\beta)) =$$
$$= \sin\alpha \cos(-\beta) - \cos\alpha \sin(-\beta) =$$
$$= \boldsymbol{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}$$

$// \sin(\alpha - \beta) =$
$= \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$

$// \cos(-\alpha) = \cos\alpha$
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

Доведено.

Формули синуса різниці і суми аргументів:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

Приклад 2:

Спростіть вираз: $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$.

$$\mathbf{sin}\left(\boldsymbol{\frac{\pi}{4}+x}\right)+\mathbf{cos}\left(\boldsymbol{\frac{\pi}{4}+x}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos x+\cos\frac{\pi}{4}\sin x+\cos\frac{\pi}{4}\cos x-\sin\frac{\pi}{4}\sin x$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x$$
$$=\boldsymbol{\sqrt{2}\cos x}$$

// Тангенс різниці і суми аргументів

Формула тангенса різниці аргументів:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

Доведення:

$$\mathbf{tg}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=$$
$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\ \alpha\sin\beta}=$$

$|:\cos\alpha\cos\beta$
За умови, що $\cos\alpha\cos\beta\neq 0$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\sin\ \alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=$$
$$=\boldsymbol{\frac{\mathbf{tg}\,\alpha-\mathbf{tg}\,\beta}{1+\mathbf{tg}\,\alpha\,\mathbf{tg}\,\beta}}$$

Доведено.

Формула тангенса суми аргументів:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

Доведення:

$$\mathbf{tg}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\operatorname{tg}\big(\alpha-(-\beta)\big)=$$

$//\ \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}(-\beta)}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=$$

$//\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\ \alpha$

$$=\boldsymbol{\frac{\mathbf{tg}\,\alpha+\mathbf{tg}\,\beta}{1-\mathbf{tg}\,\alpha\,\mathbf{tg}\,\beta}}$$

Доведено.

Формули тангенса різниці і суми аргументів:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

Приклад 3:

Доведіть тотожність: $\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

*Для доведення тотожності, нам потрібно за допомогою тотожних перетворень показати, що ліва частина дорівнює правій, або навпаки. Покажемо в даному випадку, що ліва частина дорівнює правій, для цього до лівої частини *застосуємо формулу тангенса різниці аргументів:*

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}x}=\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}$$

Отримали, що ліва частина дорівнює правій, тому тотожність доведено.

Доведено.

Приклад 4:

Обчисліть: $\operatorname{tg}75°$

**Застосуємо формулу тангенса суми аргументів:*

$$\mathbf{tg}\,\mathbf{75°}=\operatorname{tg}(45°+30°)=\frac{\operatorname{tg}45°+\operatorname{tg}30°}{1-\operatorname{tg}45°\operatorname{tg}30°}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\mathbf{3}+\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}-\sqrt{\mathbf{3}}}$$

- **Говорячи про тригонометричні формули різниці і суми аргументів, слово «аргумент» можна не вживати, а казати просто «синус суми» чи «косинус різниці».**

IV. Розв'язування завдань

№1

Обчисліть:

1) $\sin 15°$
2) $\cos 210°$
3) $\cos\frac{2\pi}{3}$

Розв'язання:

1) $\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30°$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

2) $\cos 210° = \cos(180° + 30°) = \cos 180° \cos 30° - \sin 180° \sin 30°$
$$= -1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3) $$\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\pi \cos\frac{\pi}{3} + \sin\pi \sin\frac{\pi}{3} = -1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}$$

Відповідь: 1) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3) $-\frac{1}{2}$

№2

Спростіть вираз:

1) $\sin 69° \cos 39° - \cos 69° \sin 39°$ 2) $\frac{\cos\alpha \cos\beta - \cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - \sin\alpha \sin\beta}$

3) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$

Розв'язання:

1) $\sin 69° \cos 39° - \cos 69° \sin 39° = \sin(69° - 39°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$

2) $$\frac{\cos\alpha \cos\beta - \cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - \sin\alpha \sin\beta} = \frac{\cos\alpha \cos\beta - \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta - \sin\alpha \sin\beta}$$
$$= \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta} = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$$

3) $$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)$$
$$= \cos\alpha + \sin\alpha$$

Відповідь: 1) $\frac{1}{2}$ 2) $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$ 3) $\cos\alpha + \sin\alpha$

V. Підсумок уроку

- Які формули ми засвоїли сьогодні на уроці?
- Поясніть, як можна довести формулу косинуса різниці і суми?
- Поясніть, як можна довести формули синуса різниці і суми?
- Поясніть, як можна довести формули тангенса різниці і суми?

VI. Домашнє завдання

Опрацювати §13 — О.С. Істер

Виконати № 13.2; 13.6; 13.12; 13.18 (1,3)

Опрацювати п.13 (стор. 76), вивчити формули — А.Г. Мерзляк

Виконати № 13.2; 13.4; 13.8; 13.10; 13.12