

МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



Тема: Періодичність функцій. Властивості та графіки тригонометричних функцій.

Мета:

- *Навчальна:* навчити будувати та досліджувати графіки тригонометричних функцій; навчити за знаходити найменший додатний період тригонометричних функцій;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння будувати графіки тригонометричних функцій, а також виконувати побудови графіків тригонометричних функцій за допомогою вже відомих перетворень графіків функцій; розвивати вміння досліджувати властивості тригонометричні функції за їх графіками;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук;

Тип уроку: засвоєння нових знань;

Обладнання: конспект, презентація, мультимедійне обладнання;

Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

II. Актуалізація опорних знань

III. Вивчення нового матеріалу

// Періодичність функцій

- Наведіть приклади періодичних процесів і явищ у природі чи техніці
(Рух Землі навколо сонця, обертальний рух колеса велосипеда, тощо)
- Перетворіть даний вираз за допомогою формул зведення:
 $\sin(x + 2\pi) =$

Так як значення синуса повторюється через кожний оберт як за годинниковою стрілкою, так і проти, то:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x = \sin(x - 2\pi)$$

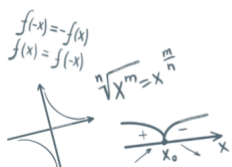
Це допоможе нам дати **означення** періодичної функції:

Функція f називається **періодичною**, якщо існує таке число $T \neq 0$, що для будь-якого x з області визначення функції f виконуються рівності:

$$f(x + T) = f(x) = f(x - T)$$

T – **період функції**.

Так як значення синуса і косинуса повторюються як мінімум через один оберт, то:



МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



Найменший період
 2π

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x = \sin(x - 2\pi)$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x = \cos(x - 2\pi)$$

Інші періоди, кратні
 2π :

$$-2\pi; \pm 4\pi; \pm 6\pi \dots$$

Поглянувши на лінію тангенсів і лінію котангенсів, ми бачимо, що значення тангенса і котангенса повторюється як мінімум через кожні пів оберта, тому:

Найменший період
 π

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x - \pi)$$

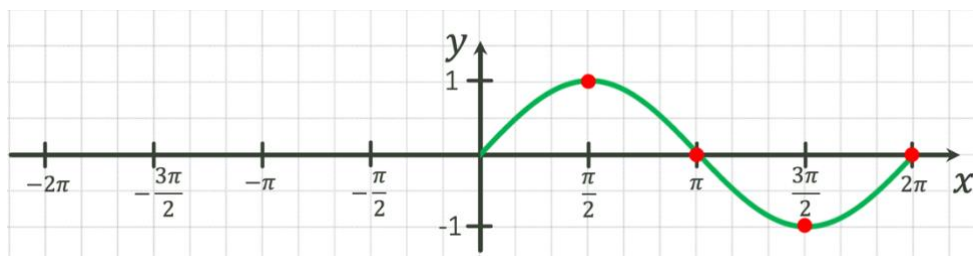
$$\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(x - \pi)$$

Інші періоди, кратні
 π :

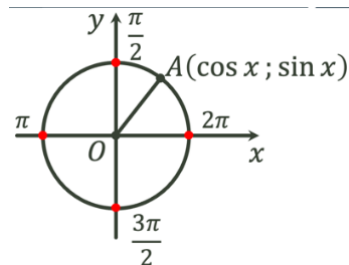
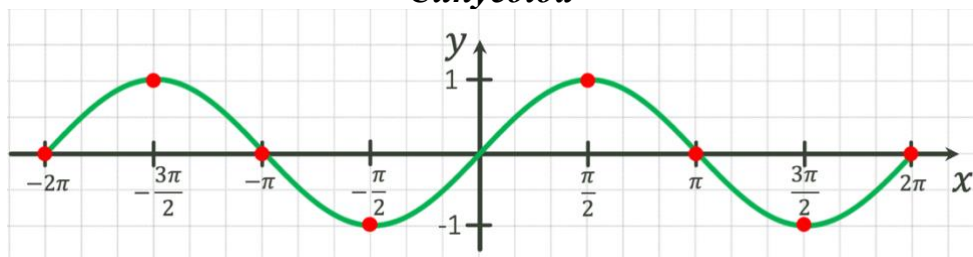
$$-\pi; \pm 2\pi; \pm 3\pi \dots$$

// Графік функції $y = \sin x$ та її властивості

1. Побудуємо систему координат, взявши за одиницю довжини 2 клітинки.
2. Так як число $\pi \approx 3,14$, то для зручності позначення числа π візьмемо 6 клітинок.
3. Проаналізуємо, яким значенням на одиничному колі відповідає $\sin x$ та позначимо ці точки на нашій системі координат.
4. З'єднаємо ці точки плавною лінією.
5. Так як функція $y = \sin x$ є непарною, то її графік симетричний відносно початку координат. Виконавши симетричне відображення функції, отримаємо графік функції $y = \sin x$ на проміжку $[-2\pi; 2\pi]$.
6. Графік функції $y = \sin x$ називається синусоїдою.



Синусоїда



Властивості функції $y = \sin x$

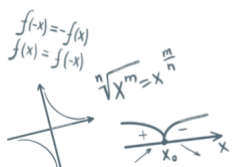
**Можна попросити унів залишити в такій таблиці стовпчик для властивостей функції $y = \cos x$*

Область визначення

$$D(f): (-\infty; +\infty)$$

Множина значень

$$E(f): [-1; 1]$$



МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



Парність, непарність

Найменший додатний період:

Нулі функції:

Знакосталість, $y > 0$:

Знакосталість, $y < 0$:

Проміжки зростання:

Проміжки спадання:

Найбільше значення функції:

Найменше значення функції:

Непарна

2π

$\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$(2\pi k; \pi + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$

$(-\pi + 2\pi k; 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$

$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$

$\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$

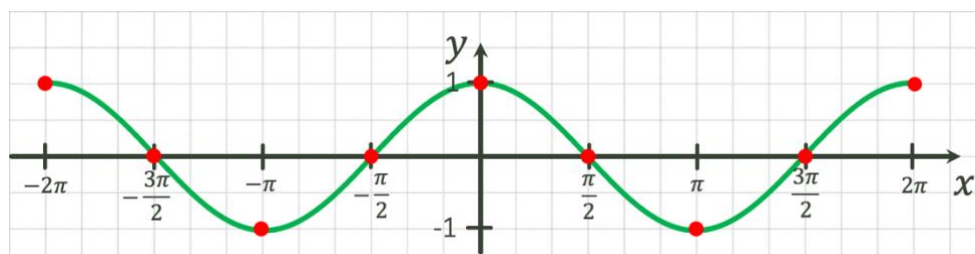
1 при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

-1 при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

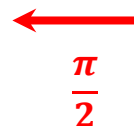
// Графік функції $y = \cos x$ та її властивості

Графі функції $y = \cos x$ можна отримати так само, як і графік функції $y = \sin x$, а можна скористатися формулами зведення, а саме тим, що $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Тобто графік функції $y = \cos x$ можна отримати за допомогою паралельного перенесення графіка $y = \sin x$ вздовж осі абсцис ліворуч на $\frac{\pi}{2}$.

Косинусоїда



$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$



Властивості функції $y = \cos x$

Область визначення

Множина значень

Парність, непарність

Найменший додатний період:

Нулі функції:

Знакосталість, $y > 0$:

Знакосталість, $y < 0$:

Проміжки зростання:

$D(f): (-\infty; +\infty)$

$E(f): [-1; 1]$

Парна

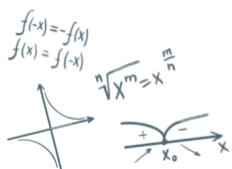
2π

$\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$

$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$

$[-\pi + 2\pi k; 2\pi k], k \in \mathbb{Z}$



МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



Проміжки спадання:

$$[2\pi k; \pi + 2\pi k], k \in \mathbb{Z}$$

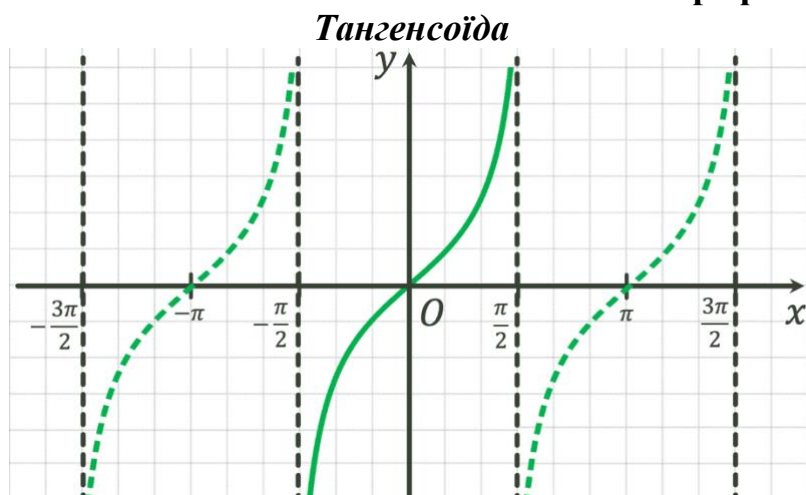
Найбільше значення функції:

$$1 \text{ при } x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Найменше значення функції:

$$-1 \text{ при } x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

// Графік функції $y = \operatorname{tg} x$ та її властивості



Графік функції $y = \operatorname{tg} x$ можна отримати так само, як і графік функції $y = \sin x$.

Так як значення тангенса у точках $\frac{\pi}{2}$ і $-\frac{\pi}{2}$ не існує, то значення тангенса при наближенні до них може бути як завгодно малим, але ніколи не буде дорівнювати даним значенням.

Графік функції $y = \operatorname{tg} x$ складається з безлічі окремих гілок – *гілок тангенсоїди*.

Властивості функції $y = \operatorname{tg} x$

**Можна попросити унів залишити в такій таблиці стовпчик для властивостей функції $y = \operatorname{ctg} x$*

Область визначення

$$D(f): x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Множина значень

$$E(f): (-\infty; +\infty)$$

Парність, непарність

Непарна

Найменший додатний період:

$$\pi$$

Нулі функції:

$$\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Знакосталість, $y > 0$:

$$\left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}$$

Знакосталість, $y < 0$:

$$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right), k \in \mathbb{Z}$$

Проміжки зростання:

$$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}$$

Проміжки спадання:

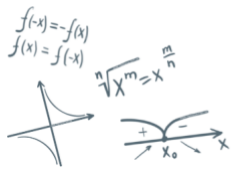
—

Найбільше значення функції:

—

Найменше значення функції:

—



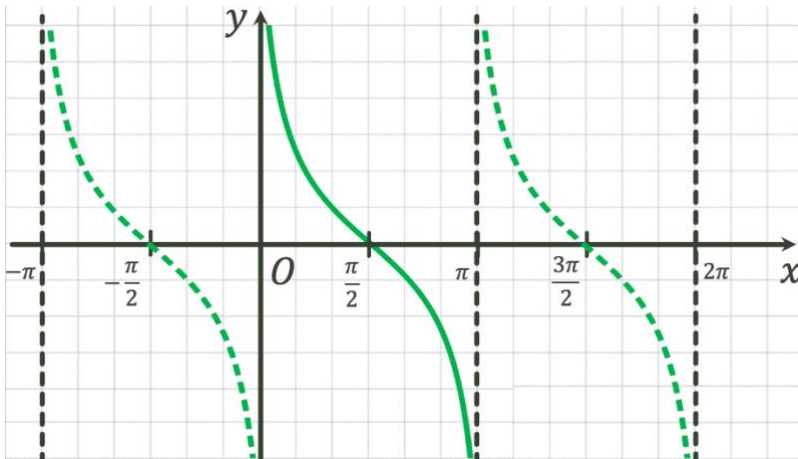
МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



// Графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ та її властивості

Котангенсоїда



Для побудови функції $y = \operatorname{ctg} x$, аналогічно, як і для функції $y = \cos x$, скористаємося формулами зведення.

Так як $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, то графік $y = \operatorname{ctg} x$ можна отримати, якщо виконаємо паралельне перенесення графіка $y = \operatorname{tg} x$ ліворуч вздовж осі абсцис, а потім симетрично відобразимо його відносно цієї осі.

Властивості функції $y = \operatorname{ctg} x$

Область визначення

$$D(f): x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Множина значень

$$E(f): (-\infty; +\infty)$$

Парність, непарність

Непарна

Найменший додатний період:

$$\pi$$

Нулі функції:

$$\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Знакосталість, $y > 0$:

$$\left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}$$

Знакосталість, $y < 0$:

$$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right), k \in \mathbb{Z}$$

Проміжки зростання:

—

Проміжки спадання:

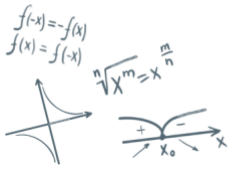
$$(\pi k; \pi + \pi k), k \in \mathbb{Z}$$

Найбільше значення функції:

—

Найменше значення функції:

—



МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



// Властивість періодичних функцій



Найменший додатний період функцій $y = \sin(kx + \varphi)$ і

$y = \cos(kx + \varphi)$ дорівнює $\frac{2\pi}{|k|}$



$$\left. \begin{array}{l} y = \sin(kx + \varphi) \\ y = \cos(kx + \varphi) \end{array} \right| T = \frac{2\pi}{|k|}$$

Приклад:

$$y = \sin\left(8x - \frac{\pi}{5}\right)$$

$$T = \frac{2\pi}{|8|} = \frac{\pi}{4}$$

$$y = \cos\left(2 - \frac{1}{7}x\right)$$

$$T = \frac{2\pi}{\left|-\frac{1}{7}\right|} = 14\pi$$



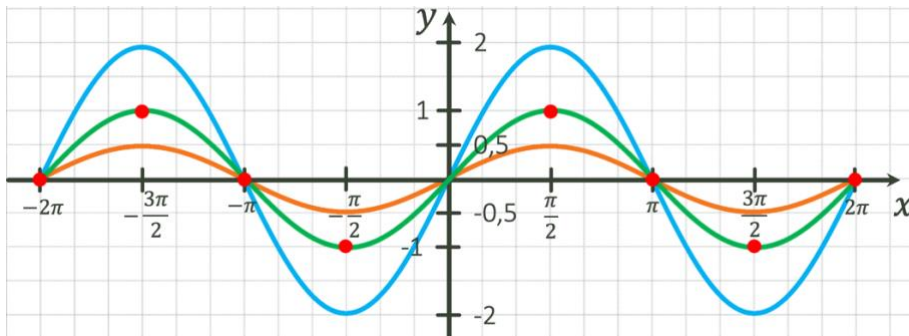
Найменший додатний період функцій $y = \operatorname{tg}(kx + \varphi)$ і

$y = \operatorname{ctg}(kx + \varphi)$ дорівнює $\frac{\pi}{|k|}$



$$\left. \begin{array}{l} y = \operatorname{tg}(kx + \varphi) \\ y = \operatorname{ctg}(kx + \varphi) \end{array} \right| T = \frac{\pi}{|k|}$$

// Побудова графіків за допомогою перетворень



$$y = 2 \sin x$$

// щоб побудувати даний графік, необхідно графік $y = \sin x$ розтягнути у 2 рази від осі абсцис //

$$y = \frac{1}{2} \sin x$$

// щоб побудувати даний графік, необхідно графік $y = \sin x$ стиснути у 2 рази від осі абсцис //

$$y = \sin x$$

$$y = 2 \sin x$$

$$y = \frac{1}{2} \sin x$$



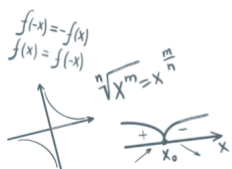
Розтягнути

у 2 рази



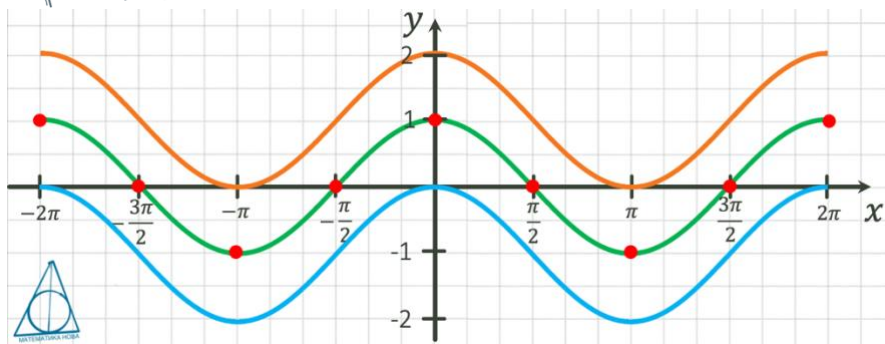
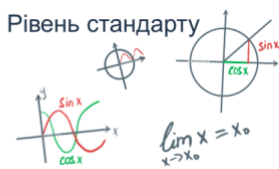
Стиснути

у 2 рази



МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



$$y = \cos x - 1$$

// щоб побудувати даний графік, необхідно графік $y = \cos x$ перенести вздовж осі ординат на 1 одиницю вниз

$$y = \cos x + 1$$

// щоб побудувати даний графік, необхідно графік $y = \cos x$ перенести вздовж осі ординат на 1 одиницю вгору

$$y = \cos x$$

$$y = \cos x - 1$$

$$y = \cos x + 1$$

Вниз
на 1 одиницю

Вгору
на 1 одиницю

IV. Розв'язування завдань

№1

Знайдіть найменших додатний період функції:

1) $y = \cos(2x + 3)$

2) $y = 7 \sin 2x$

3) $y = 6 \sin(2 + 3x)$

4) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{3}$

Розв'язання:

1) $y = \cos(2x + 3)$

$$T = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$$

2) $y = 7 \sin 2x$

$$T = \frac{2\pi}{|2|} = \frac{2\pi}{2}$$

3) $y = 6 \sin(2 + 3x)$

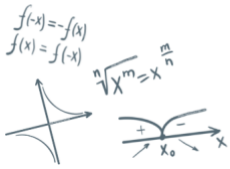
$$T = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$$

4) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{3}$

$$T = \frac{\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = \pi \cdot \frac{3}{1} = 3\pi$$

Відповідь:

1) π ; 2) $\frac{2\pi}{2}$; 3) $\frac{2\pi}{3}$; 4) 3π



МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



№2

Чи є число T періодом функції f , якщо:

1) $f(x) = \sin \frac{x}{2}, T = 8\pi$

2) $f(x) = \operatorname{ctg} \frac{x}{3}, T = 5\pi$

3) $f(x) = 5 \cos 4x, T = \pi$

Розв'язання:

1) $f(x) = \sin \frac{x}{2}, T = 8\pi$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 2\pi \cdot \frac{2}{1} = 4\pi - \text{найменший додатний період.}$$

8π – число, що є кратним числа 4π , отже число 8π також є періодом даної функції.

2) $f(x) = \operatorname{ctg} \frac{x}{3}, T = 5\pi$

$$T_0 = \frac{\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = \pi \cdot \frac{3}{1} = 3\pi - \text{найменший додатний період.}$$

3π – число, що не є кратним числа 5π , отже число 3π не є періодом даної функції.

3) $f(x) = 5 \cos 4x, T = \pi$

$$T_0 = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2} - \text{найменший додатний період.}$$

$\frac{\pi}{2}$ – число, що є кратним числа π , отже число $\frac{\pi}{2}$ також є періодом даної функції.

Відповідь: 1) так; 2) ні; 3) так

№3

Знайдіть нулі функцій, не виконуючи побудови їх графіків:

1) $f(x) = \sin 7x$

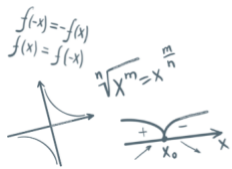
2) $f(x) = \sin \left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

3) $f(x) = \cos \left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{4}\right)$

Розв'язання:

1) $f(x) = \sin 7x$
 $7x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$
 $x = \frac{\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}$

2) $f(x) = \sin \left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$
 $2x - \frac{\pi}{4} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$



МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

3)

$$f(x) = \cos\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{3}x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{3}x = \frac{2\pi - \pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{3}x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + 3\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Відповідь: 1) $x = \frac{\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}$; 2) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$; 3) $x = \frac{3\pi}{4} + 3\pi k, k \in \mathbb{Z}$

V. Підсумок уроку

- Поясніть, які функції називаються періодичними
- Як побудувати графік функції $y = \cos x$, використовуючи її періодичність?
- Як побудувати графік функції $y = \sin x$, використовуючи її періодичність?
- Як знайти найменший додатний період функцій $y = \sin(kx + \varphi)$ і $y = \cos(kx + \varphi)$?
- Як знайти найменший додатний період функцій $y = \operatorname{tg}(kx + \varphi)$ і $y = \operatorname{ctg}(kx + \varphi)$?

VI. Домашнє завдання

Опрацювати §12, опрацювати конспект
Виконати № 12.7; 12.16

О.С. Істер

Опрацювати п.11 та конспект;
Виконати № 11.8; 11.10; 11.12; 11.16; 11.19

А.Г. Мерзляк