

МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



Тема: Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу

Мета:

- *Навчальна:* пригадати основну тригонометричну тотожність та навчити знаходити інші тригонометричні тотожності а також розуміти співвідношення між функціями одного й того самого числового аргументу;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння знаходити інші тригонометричні тотожності за допомогою вже відомих тотожностей; розв'язувати завдання використовуючи тригонометричні тотожності для рівносильних перетворень виразів, доведення тригонометричних рівностей а також обчислення значень тригонометричних функцій за даними значенням однієї з тригонометричних функцій;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук;

Тип уроку: засвоєння нових знань;

Обладнання: конспект, презентація, мультимедійне обладнання;

Хід уроку

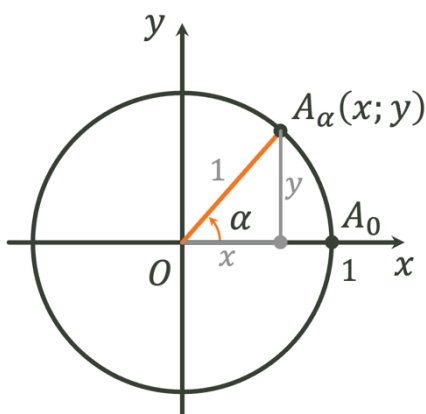
I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

II. Вивчення нового матеріалу

// Основна тригонометрична тотожність

**Основна тригонометрична тотожність відома учням ще з 8-го класу*



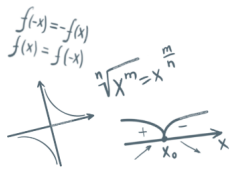
Розглянемо одиничне коло, в якому початковий радіус OA_0 переходить в радіус OA_α , $A_\alpha(x; y)$

➤ Поясніть, чому $x^2 + y^2 = 1$?

(так як радіус кола дорівнює 1, то координати точки $A_\alpha(x; y)$ задовольняють рівняння кола $x^2 + y^2 = 1$, також ми можемо розглянути прямокутний трикутник, в якому два катети дорівнюють x і y , а гіпотенуза дорівнює 1)

➤ Поясніть, чому $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$?

$$\begin{array}{l} x = \cos \alpha, y = \sin \alpha \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array} \quad \left| \rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \right.$$



МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ – основна тригонометрична тотожність

- Поясніть, як з даної тотожності виразити $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$
(учні вже робили такі дії в попередніх класах)

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

*Знак перед радикалом обираємо в залежності від того, у якій чверті лежить кут α

Приклад

Спростіть вираз:

$$1 + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$$

Розв'язання:

$$1 + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = (1 - \cos^2 \alpha) + \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 2 \sin^2 \alpha$$

Відповідь: $2 \sin^2 \alpha$

// Інші тригонометричні тотожності

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1, \cos \alpha \neq 0, \sin \alpha \neq 0$$

Отже:

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

- Поділіть обидві частини даної тотожності на $\operatorname{tg} \alpha$, а потім на $\operatorname{ctg} \alpha$, що ви отримали?

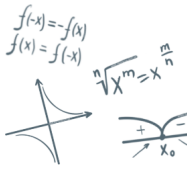
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

- Поділіть обидві частини основної тригонометричної тотожності на $\cos \alpha$, а потім на $\sin \alpha$, що ви отримали?

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$



III. Розв'язування завдань

№1

$$1) \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$$

$$2) \quad 1 - \sin^2 \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$3) \quad \frac{1 + \operatorname{ctg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$$

Розв'язання:

$$1) \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$2) \quad 1 - \sin^2 \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha : \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \\ = \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha$$

$$3) \quad \frac{1 + \operatorname{ctg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}}{\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha} : \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha} \\ = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$$

№2

Доведіть тотожність:

$$1) \quad \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$$

$$2) \quad (\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \operatorname{tg}^2 \alpha = \cos^2 \alpha$$

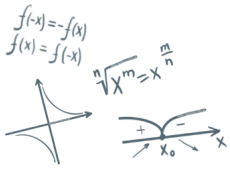
Розв'язання:

$$1) \quad \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$$

$$\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$$

$$2) \quad (\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \operatorname{tg}^2 \alpha = \cos^2 \alpha$$

$$(\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \operatorname{tg}^2 \alpha = \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \cos^2 \alpha \right) \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \\ = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} \\ = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$$



МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



№3

Обчисліть $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{2}$

Розв'язання:

Поділимо на $\cos^2 \alpha$ чисельник і знаменник даного дробу:

$$\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}$$

За умовою $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{2}$, отже:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1} = \frac{\frac{5}{2}}{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 1} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{25}{4} - 1} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{21}{4}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{21} = \frac{10}{21}$$

Відповідь: $\frac{10}{21}$

№4

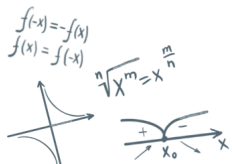
Спростіть вираз:

- 1) $\frac{2 \cos^2 \alpha - 1}{\sin \alpha + \cos \alpha}$
- 2) $\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + 1$
- 3) $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$

Розв'язання:

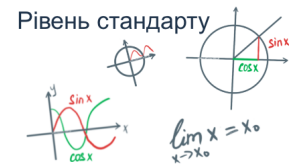
$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{2 \cos^2 \alpha - 1}{\sin \alpha + \cos \alpha} &= \frac{2 \cos^2 \alpha - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} \\ &= \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha)}{\sin \alpha + \cos \alpha} \\ &= \cos \alpha - \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + 1 &= \sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 1) + 1 \\ &= \sin^2 \alpha \cdot 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$



МАТЕМАТИКА НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС



3)

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} &= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta}} = \frac{\frac{\cos \beta \sin \alpha + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta}} \\ &= \frac{\cos \beta \sin \alpha + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} \cdot \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta} \\ &= \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \end{aligned}$$

IV. Підсумок уроку

- Як з основної тригонометричної тотожності виразити $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$?
- Сформулюйте означення тангенса через синус і косинус того самого кута
- Чому дорівнює добуток тангенса і котангенса?
- Як виразити тангенс через котангенс того самого кута?
- Як виразити котангенс через тангенс того самого кута?

Домашнє завдання

Опрацювати §10 та конспект,
Виконати № 10.4; 10.6; 10.8(1,3); 10.10 (1,3); 10.12

О.С. Істер

Опрацювати п.12 та конспект,
Виконати № 12.2; 12.4; 12.6; 12.8

А.Г. Мерзляк