Тема: Властивості тригонометричних функцій
Мета:

- *Навчальна:* розглянути поняття області визначення та множини значень тригонометричних функцій; навчити знаходити знаки тригонометричних функцій довільних кутів; розглянути поняття парності тригонометричних функцій; розглянути поняття періодичності тригонометричних функцій, поняття найменшого періоду.
- *Розвиваюча:* розвивати вміння знаходити область визначення та множину значень тригонометричних функцій; розвивати вміння знаходити значення тригонометричних функцій використовуючи парність і непарність тригонометричних функцій; розвивати вміння знаходити значення тригонометричних функцій кутів, що більші за $360°$, використовуючи періодичність тригонометричних функцій;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук;

Тип уроку: засвоєння нових знань;
Обладнання: конспект, презентація, мультимедійне обладнання;

Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

II. Актуалізація опорних знань

- Які ви знаєте тригонометричні функції?

$y = \sin x$	Синус
$y = \cos x$	Косинус
$y = \operatorname{tg} x$	Тангенс
$y = \operatorname{ctg} x$	Котангенс

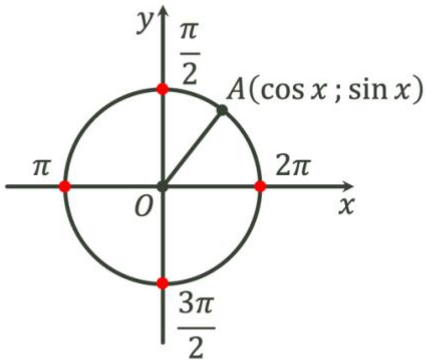
III. Вивчення нового матеріалу

// Область визначення тригонометричних функцій

Область визначення

➢ Якого значення може набувати кут «x» у радіанах?
(Будь-якого)

$\boldsymbol{D(\sin x) = R}$ $\boldsymbol{D(\cos x) = R}$



➢ В яких точках значення $\operatorname{tg} x$ не існує?

$$\boldsymbol{D(\operatorname{tg} x):\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}}$$

- В яких точках значення $\operatorname{ctg} x$ не існує?

  $\boldsymbol{D(\operatorname{ctg} x)\colon\ x \neq \pi k,\ k \in \mathbb{Z}}$

Приклад **Знайдіть область визначення функції $\boldsymbol{y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}}$**

$y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$

$\boldsymbol{D(y)}$:

$$\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\ |\cdot 2$$

$$\boldsymbol{x \neq \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}}$$

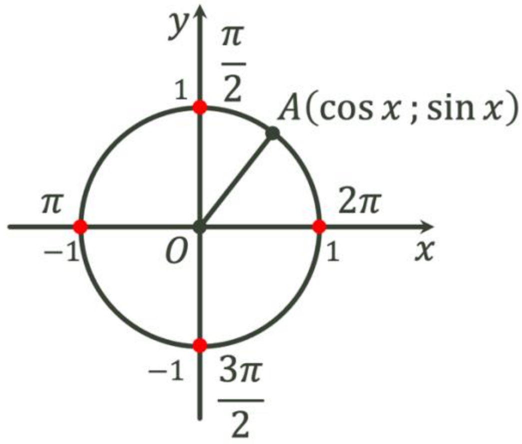
(Множина всіх дійсних чисел, крім чисел $\pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$)

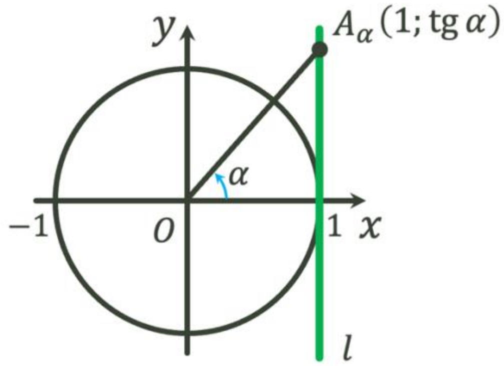
// Множина значень тригонометричних функцій

Множина значень

- Яким може бути найбільше і найменше значення синуса і косинуса?

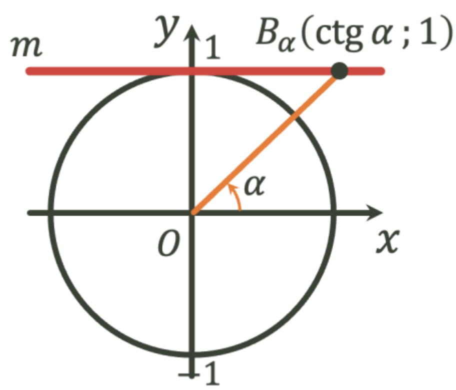
$\boldsymbol{E(\sin x) = [-1; 1]}$ $\boldsymbol{E(\cos x) = [-1; 1]}$





Ордината т. A_α дорівнює тангенсу кута α

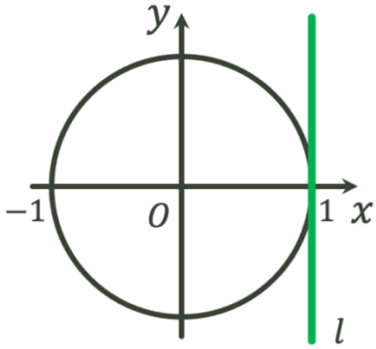
$\boldsymbol{E(\operatorname{tg} x) = R}$



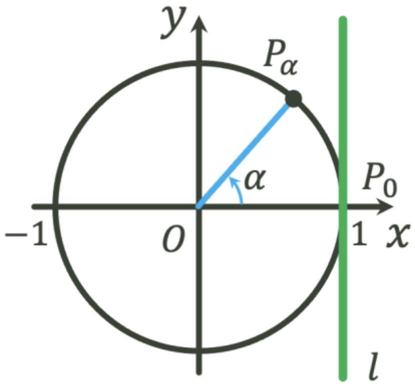
Абсциса т. B_α дорівнює котангенсу кута α

$\boldsymbol{E(\operatorname{ctg} x) = R}$

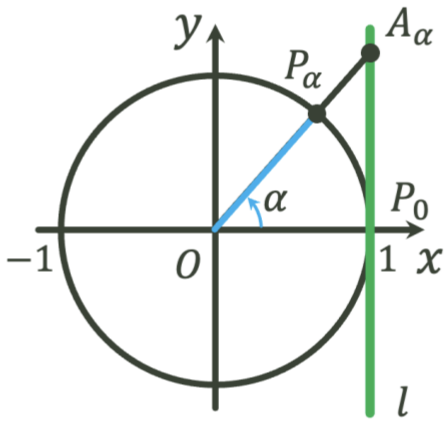
Чому ордината т. A_α дорівнює тангенсу кута α?



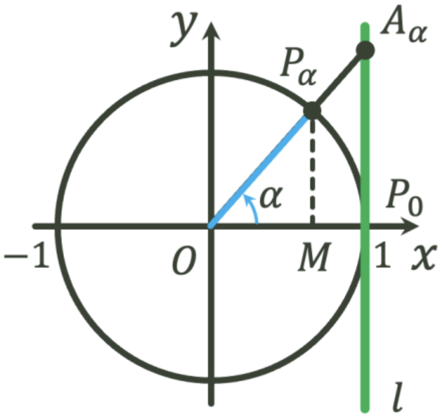
- Побудуємо пряму l, що проходить через точку $(1; 0)$ перпендикулярно до осі абсцис



- При повороті на кут α початковий радіус OP_0 переходить у радіус OP_α
  $P_\alpha(x; y)$
  $x = \cos\alpha$
  $y = \sin\alpha$



- Пряма $OP_\alpha \cap l = A_\alpha$



- Побудуємо $P_\alpha M \perp Ox$, тоді:
  $\Delta OP_\alpha M \sim \Delta OA_\alpha P_0$

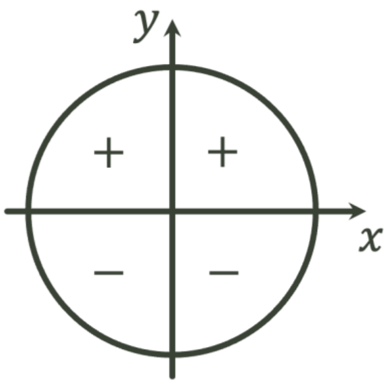
$\frac{P_\alpha M}{OM} = \frac{A_\alpha P_0}{OP_0} \to \frac{y}{x} = \frac{A_\alpha P_0}{1} \to \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = A_\alpha P_0$, отже $A_\alpha P_0 = \operatorname{tg}\alpha$.

Тобто ордината точки A_α дорівнює тангенсу кута α.

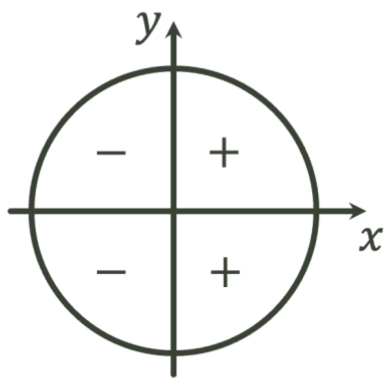
// Знаки тригонометричних функцій

- Проаналізуйте, в яких координатних чвертях значення тригонометричних функцій буде додатним, а в яких – від'ємним?
  (Координати по абсцисі – це значення косинуса, координати по ординаті одиничного кола – значення синуса)

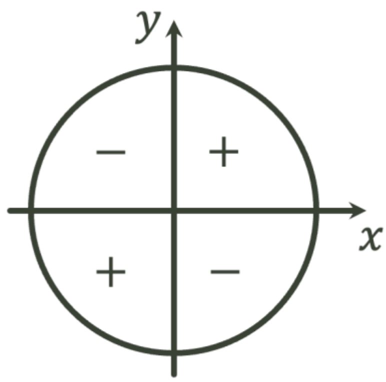
$\sin\alpha$



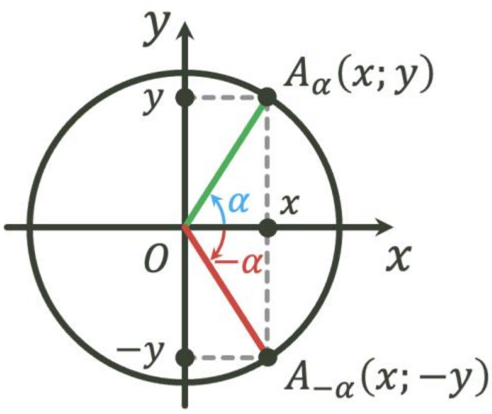
$\cos\alpha$



$\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$



// Парність і непарність тригонометричних функцій



Точки A_α і $A_{-\alpha}$ симетричні, так як при повороті на кут α початковий радіус одиничного кола переходить у точку OA_α, а на кут $-\alpha$ – у радіус $OA_{-\alpha}$, отже абсциси точок A_α і $A_{-\alpha}$ будуть однаковими, а ординати – різними. Отже:

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$
$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

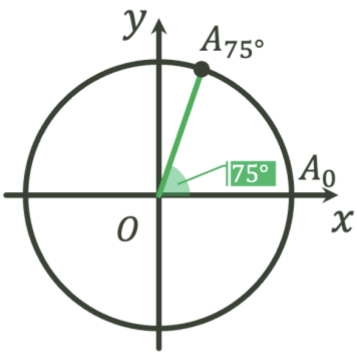
- Які з даних функцій є парними, а які – непарними?
  Косинус – парна функція.
  Синус, тангенс і котангенс – непарні функції.

Приклад

$$\cos(-45°) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$$

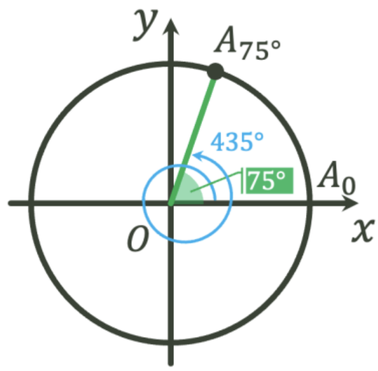
// Періодичність тригонометричних функцій

Періоди синуса і косинуса



- При повороті на кут 75° початковий радіус OA_0 переходить у радіус $OA_{75°}$. На який кут, відмінний від 75° потрібно повернути радіус OA_0, щоб отримати цей самий радіус $OA_{75°}$?

Цей самий радіус $OA_{75°}$ можна отримати якщо повернути початковий радіус OA_0 на кут 435°, тобто на один повний оберт $+75°$. Отже ***при зміні кута на ціле число обертів*** (360° *або* 2π *радіан)* ***значення тригонометричних функцій синуса і косинуса змінюватися не будуть.***



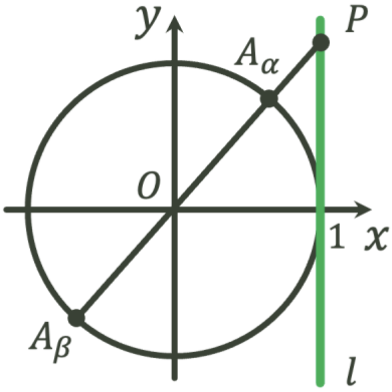
Всі функції, що мають таку властивість, називаються *періодичними*.

Кожна періодична функція має безліч періодів. Наприклад, функції синус і косинус мають періоди $2\pi, 4\pi, 6\pi$ ...

2π – *<u>найменший період</u>* синуса і косинуса.

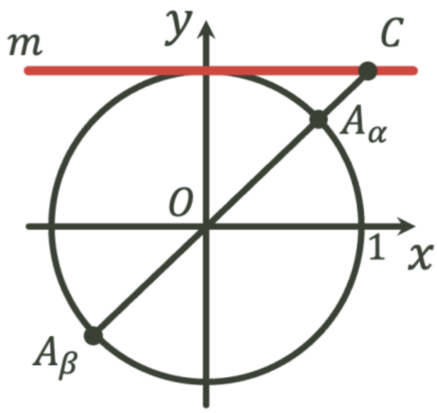
$$\sin(\alpha + 360°k) = \sin\alpha \qquad \cos(\alpha + 360°k) = \cos\alpha$$
$$\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha \qquad \cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha$$

Періоди тангенса і котангенса



- Чи буде число 2π періодом тангеса і котангенса? *(Так)*
- Чи буде число 2π найменшим періодом тангенса і котангенса?

Розглянемо радіуси OA_α і OA_β, що утворюються внаслідок повороту початкового радіуса на кути α і β. Точки O, A_α і A_β лежать на одній прямій, отже прямі OA_α та OA_β перетинають вісь тангенсів в одній точці – точці P. Отже два різні кути мають мають одне значення. Тому тангенс при зміні кута на ціле число півобертів не буде змінювати свого значення.



Аналогічно можна показати, що котангес не буде змінювати свого значення при повороті на ціле число півобертів.

π – *<u>найменший період</u>* тангенса і котангенса

$$\mathbf{tg}(\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{180°}\boldsymbol{k}) = \mathbf{tg}\,\boldsymbol{\alpha} \qquad \mathbf{ctg}(\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{180°}\boldsymbol{k}) = \mathbf{ctg}\,\boldsymbol{\alpha}$$

$$\mathbf{tg}(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\pi k}) = \mathbf{tg}\,\boldsymbol{\alpha} \qquad \mathbf{ctg}(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\pi k}) = \mathbf{ctg}\,\boldsymbol{\alpha}$$

Приклад

$$\cos(390°) = \cos(30° + 360°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

IV. Розв’язування завдань

№1

Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \dfrac{1}{\sin x - 1}$ 2) $y = \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

3) $y = \sqrt{\cos x}$ 4) $y = \sin\sqrt{x}$

Розв’язання:

1) $y = \dfrac{1}{\sin x - 1}$

$\sin x - 1 \neq 0$

$\sin x \neq 1$

Нам потрібно виключити всі точки, в яких $\sin x = 1$, тому:

$\boldsymbol{D(y)}$: $\boldsymbol{x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}}$

2) $y = \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

$\boldsymbol{D(y)}$:

$$x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\boldsymbol{x \neq \frac{2\pi + \pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}}$$

3) $y = \sqrt{\cos x}$

Дана функція буде мати зміст, якщо $\cos x \geq 0$

Нам вже відомо, що $\cos x > 0$ у I і IV координтних чвертях, тобто на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Також косинус має період 2π, тому проміжок на якому значення $\cos x > 0$:

$$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$$

$\cos x = 0$ в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

Областю визначення буде об’днання двох даних проміжків.

$\boldsymbol{D(y)}$:

$$\boldsymbol{x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}}$$

4) $y = \sin\sqrt{x}$

Дана фукнція буде мати зміст, якщо $x \geq 0$.

Так як $D(\sin x) = R$, то:

$$\boldsymbol{D\left(\sin\sqrt{x}\right): x \in [0; +\infty)}$$

№2

Знайдіть множину значень функції:

1) $y = 2 + \sin x$ 2) $y = 4\sin x - 5$

3) $y = \dfrac{1}{2}\cos x$ 4) $y = \cos^2 x + 1$

Розв'язання:

1) $y = 2 + \sin x$

$\boldsymbol{E(y)}$: $-1 \le \sin x \le 1$

$1 \le \sin x + 2 \le 3$

$\boldsymbol{x \in [1; 3]}$

2) $y = 4\sin x - 5$

$\boldsymbol{E(y)}$: $-1 \le \sin x \le 1$

$-4 \le 4\sin x \le 4$

$-9 \le 4\sin x - 5 \le -1$

$\boldsymbol{x \in [-9; -1]}$

3) $y = \dfrac{1}{2}\cos x$

$\boldsymbol{E(y)}$: $-1 \le \cos x \le 1$

$-\dfrac{1}{2} \le \dfrac{1}{2}\cos x \le \dfrac{1}{2}$

$\boldsymbol{x \in \left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]}$

4) $y = \cos^2 x + 1$

Значення $\cos^2 x$ може змінюватися від 0 до 1, отже значення всього виразу може змінюватися від 1 до 2.

$\boldsymbol{E(y)}$: $\boldsymbol{x \in [1; 2]}$

№3

Знайдіть значення виразу:

$$\sin(-30°) + \cos(-60°) - \frac{1}{3}\operatorname{tg}(-60°)\operatorname{ctg}(-30°)$$

Розв'язання:

$$\sin(-30°) + \cos(-60°) - \frac{1}{3}\operatorname{tg}(-60°)\operatorname{ctg}(-30°) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(-\sqrt{3}\right) \cdot \left(-\sqrt{3}\right)$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot 3 = -\frac{3}{3} = -1$$

Відповідь: -1

№4

Обчисліть:

1) $\sin -405°$ 2) $\cos 750°$

3) $\operatorname{tg} 210°$ 4) $\operatorname{ctg} -\frac{4}{3}\pi$

5) $\sin\frac{11}{6}\pi$

Розв'язання:

1) $$\sin(-405°) = -\sin 405° = -\sin(45° + 360°) = -\sin 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2) $$\cos 750° = \cos(30° + 2 \cdot 360°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

3) $$\operatorname{tg} 210° = \operatorname{tg}(30° + 180°) = \operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

4) $$\operatorname{ctg}\left(-\frac{4}{3}\pi\right) = -\operatorname{ctg}\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\operatorname{ctg}\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

5) $$\sin\frac{11}{6}\pi = \sin\left(\frac{12\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

V. Підсумок уроку

- Чи існує таке значення, для якого $\sin x = -0{,}4$?
- Чи існує таке значення, для якого $\cos x = 1{,}001$?
- Який знак має $\sin 187°$? Чому?
- Порівняйте з нулем вираз $\cos(-87°)$
- Порівняйте з нулем вираз $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{157\pi}{375}\right)$
- Кутом якої чверті є кут α, якщо: $\cos\alpha < 0$ і $\sin\alpha > 0$

Домашнє завдання

Опрацювати §9, опрацювати конспект — О.С. Істер
Виконати № 9.6; 9.12; 9.21; 9.26 (2); 9.28; 9.30

Опрацювати п.10, п.11(ст.63-65), опрацювати конспект. — А.Г. Мерзляк
Виконати № 10.3, 10.5, 10.7, 11.2, 10.15.